Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Applicazioni delle trasformate di Laplace.

Prof. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si risolvano, con la trasformata di Laplace, i seguenti problemi:

$$a)\begin{cases} x''+4x'+13x=te^{-t}; \\ x(0)=0; x'(0)=2. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x^{(4)}+8x''+16x=0; \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0; x'''(0)=1. \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x'=-4x-y+e^{-t}; \\ y'=x-2y; \\ x(0)=y(0)=0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia f è una funzione continua assegnata. Si risolva, con la trasformata di Laplace, il seguente problema:

$$\begin{cases} x'''+2x''+x'=f(t); \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0. \end{cases}$$

Esercizio 3 Si risolvano i circuiti elettrici di equazione

$$\begin{cases} L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q(t)=e(t); \\ i(0)=0, \end{cases}$$

quando $q(0)=0$ e

$$a) L=1, R=0, C=10^{-4},\ e(t)=100\,\chi_{[0,2\pi[}(t). \qquad b) L=1, R=100, C=4\cdot 10^{-4},\ e(t)=50\,t\,\chi_{[0,1[}(t).$$

(Qui χ_E indica la funzione caratteristica dell'insieme E)

Esercizio 4 Una massa di peso unitario è attaccata ad una molla leggera che viene tesa di 1 metro da una forza di 4 kg. La massa è inizialmente a riposo nella sua posizione di equilibrio. All'istante $t=0$ una forza esterna $f(t)=\cos(2t)$ viene applicata alla massa, ma al tempo $t=2\pi$ la forza viene spenta istantaneamente. Si trovi la funzione posizione $x(t)$ della massa.

Esercizio 5 Si utilizzi la trasformata di Laplace per determinare una funzione $\varphi : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=0 & \text{per ogni } x>0 \text{ e } y>0, \\ \varphi(0,y)=1 & \text{per ogni } y>0, \\ \varphi(x,0)=e^{-x} & \text{per ogni } x>0. \end{cases}$$

Soluzioni: 1. a) $x(t)=\frac{1}{50}\big((5t-1)e^{-t}+e^{-2t}(\cos(3t)+32\,\mathrm{sen}\,(3t)\big)\,u(t)$.
b) $x(t)=\frac{1}{16}(\mathrm{sen}\,(2t)-2t\,\cos(2t))u(t)$.
c) $x(t)=\big(-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{1}{2}te^{-3t}+\frac{1}{4}e^{-t}\big)\,u(t)$; $y(t)=\big(-\frac{1}{4}e^{-3t}-\frac{1}{2}te^{-3t}+\frac{1}{4}e^{-t}\big)\,u(t)$.
2. $x(t)=\int_0^t\Big(1-(1+t-\xi)e^{-(t-\xi)}\Big)\,f(\xi)\,d\xi$.
3. a) $i(t)=\big(1-u(t-2\pi)\big)\big(\mathrm{sen}\,(100t)\big)u(t)$.
b) $i(t)=\frac{1}{50}\Big((1-e^{-50t}-50te^{-50t})u(t)+(-1+e^{-50(t-1)}-2450(t-1)e^{-50(t-1)})u(t-1)\Big)$.
4. Il problema si traduce nell'equazione $x''+4x=f(t); x(0)=x'(0)=0$. $x(t)=\frac{1}{4}t(\mathrm{sen}\,(2t))u(t)$ se $t<2\pi$ e $x(t)=\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\,(2t)$ se $t\geq 2\pi$.
5. $\varphi(x,y)=(e^{y-x}-1)u(x-y)+u(x)$.