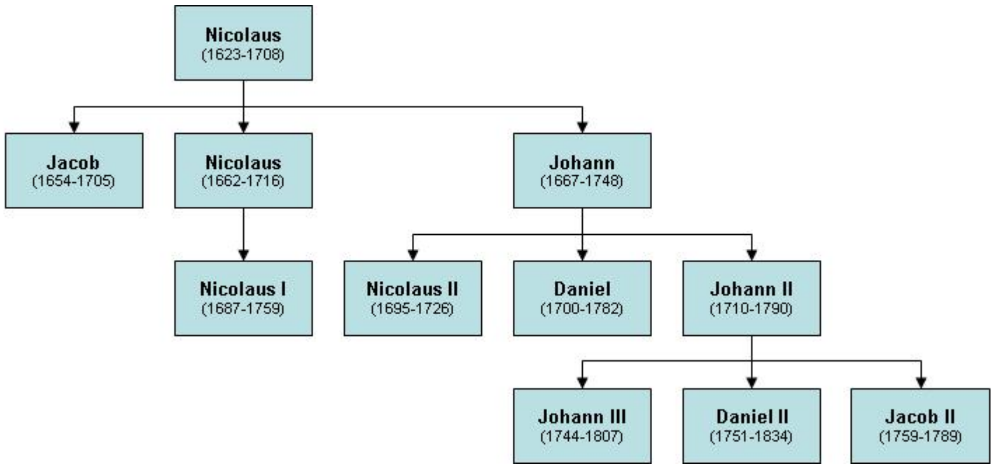
La famiglia Bernoulli

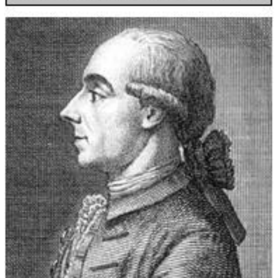


Jacob (1654-1705)

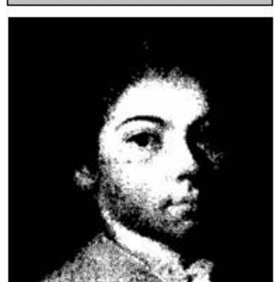
Johann (1667-1748)

Nicolaus II (1695-1726)

Daniel (1700-1782)



Johann III (1744-1807)



Jacob II (1759-1789)

Jacob Bernoulli (1654-1705) - anche *Jacques* o *James*

• Disuguaglianza di Bernoulli: per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall x > -1$$

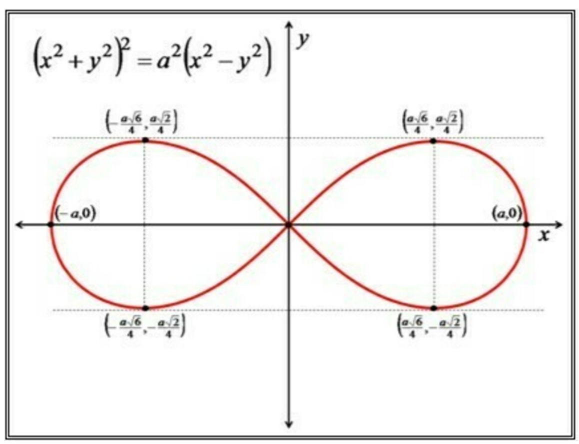
• Equazione differenziale di Bernoulli:

$$y' + f(x)t = g(x)y^n.$$

• La *Lemniscata di Bernoulli* è una curva algebrica piana a forma di otto orizzontale: essa è definita dai punti per i quali il prodotto delle distanze da due punti fissati detti fuochi è costante. Denotando tale costante con c^2, una sua equazione cartesiana risulta

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Bernoulli la introdusse (nel 1694) come variante dell'ellisse, che è il luogo dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante. La chiamò *lemniscus*, l'equivalente latino di "fiocco pendente".



In coordinate polari ha equazione

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\theta.$$

• La *spirale logaritmica* in coordinate polari ha equazione

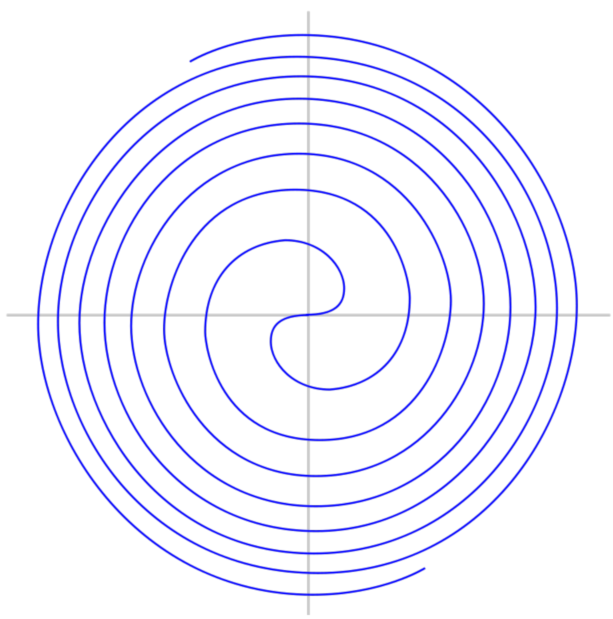
$$r = a\mathrm{e}^{b\theta} \quad \text{oppure} \quad \theta = \frac{1}{b} \ln(r/a)$$

da cui il nome "logaritmica". Affascinato dalle sue molteplici proprietà, Jacob la volle sulla lapide della sua tomba (Basler Münster, un tempo cattedrale cattolica di Basilea).

Il motto che la accompagna, *eadem mutata resurgo* ("risorgo uguale eppure diversa") fa riferimento forse all'ubiquità di tale curva in natura, o forse piuttosto alle proprietà di auto-similarità. Proprietà che, purtroppo, non si evincono dalla spirale scolpita sulla lapide: difatti, l'ignoto autore del monumento, invece di una spirale logaritmica (dove i raggi crescono in progressione geometrica) scolpì una banale spirale archimedea (dove la progressione dei raggi è aritmetica).

• La *spirale parabolica* o *spirale di Fermat* ha equazione

$$r^2 = a^2\theta$$



• L'*Ars conjectandi*, pubblicato postumo nel 1713, è la sua opera più famosa; è il primo testo di *Calcolo delle probabilità*.

Johann Bernoulli (1667-1748) - anche *Jean* o *John*

• *Regola di de l'Hopital*
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni differenziabili nel punto a tali che $f(a) = 0 = g(a)$ e se esiste

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

• *Relazione tra funzioni trigonometriche e logaritmi immaginari* (1702)

$$\arctan z = \frac{1}{i} \ \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

• Polemica con **Brook Taylor** (1685-1731) per la paternità della *serie di Taylor*: se $f(x)$ è una funzione a valori reali, definita in un intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ e infinite volte derivabile, la serie di potenze

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

scritta più compattamente come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

è la serie di Taylor di f nel punto x_0. Troncata al grado n, fornisce il *polinomio di Taylor* che approssima la funzione f in un intorno di x_0.

In realtà, sia Jean Bernoulli che Brook Taylor erano stati anticipati da **Gregory**!