

## LEONARD EULER



Leonhard Euler, dipinto di Jakob Emanuel Handmann

**Leonhard Euler** (in italiano noto come **Eulero**) (Basilea 1707 – San Pietroburgo, 1783) è considerato il più importante matematico del Settecento, e uno dei massimi della storia.

È noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi e ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi.

## BIOGRAFIA

### **Infanzia**

Leonhard Euler nacque a Basilea nel 1707 da Paul Euler, pastore protestante, e Marguerite Brucker. Dopo di lui nacquero due sorelle, Anna Maria e Maria Magdalena.

Poco dopo la nascita di Leonhard, la famiglia si trasferì a Riehen, dove Euler passò la maggior parte dell'infanzia. Paul Euler era amico della famiglia Bernoulli, in particolare di **Johann Bernoulli**, uno dei più famosi matematici d'Europa, che ebbe molta influenza su Leonhard.

Euler entrò all'Università di Basilea tredicenne e si laureò in filosofia. A quel tempo riceveva anche lezioni di matematica da Johann Bernoulli, che aveva scoperto il suo enorme talento.

Il padre di Euler lo voleva teologo e gli fece studiare il greco e l'ebraico, ma Bernoulli lo convinse che il destino del figlio era la matematica. Così, nel 1726 Euler completò il dottorato sulla propagazione del suono e, nel 1727, partecipò al *Grand Prix* dell'Accademia francese delle scienze. Il problema di quell'anno riguardava il miglior modo di disporre gli alberi su una nave. Arrivò secondo subito dopo Pierre Bouguer, oggi riconosciuto come il padre dell'architettura navale. Euler comunque vinse quel premio ben dodici volte nella sua vita.

### **San Pietroburgo**

In quegli anni i due figli di Johann Bernoulli, Daniel e Nicolas, lavoravano all'Accademia imperiale delle scienze di San Pietroburgo. Nel 1726 Nicolas morì e Daniel prese la cattedra di matematica e fisica del fratello, lasciando vacante la sua cattedra in medicina. Per questa fece quindi il nome di Euler, che accettò. Trovò lavoro anche come medico nella marina russa.

Euler arrivò nella capitale russa nel **1727**. Poco tempo dopo passò dal dipartimento di medicina a quello di matematica. In quegli anni alloggiò con **Daniel Bernoulli** con cui avviò un'intensa collaborazione matematica. Grazie alla sua incredibile memoria Euler imparò facilmente il russo.

L'Accademia più che un luogo d'insegnamento era un luogo di ricerca. Pietro il Grande infatti aveva creato l'Accademia per poter annullare il divario scientifico tra la Russia imperiale e l'Occidente. Dopo la morte di Caterina I, che aveva continuato la politica di Pietro, venne al potere Pietro II. Questi, sospettoso degli scienziati stranieri, tagliò i fondi destinati a Euler e ai suoi colleghi.

Nel 1734 il matematico sposò Katharina Gsell, figlia di Georg, un pittore dell'Accademia. La giovane coppia si trasferì in una casa vicino al fiume Neva. Ebbero ben tredici figli, dei quali però solo cinque sopravvissero.

### **Berlino**

I continui tumulti in Russia avevano stancato Euler che amava una vita più tranquilla. Gli fu offerto un posto all'Accademia di Berlino da Federico II di Prussia. Euler accettò e partì per Berlino nel **1741**. Visse a Berlino per i successivi 25 anni, e là ebbe anche occasione di conoscere Johann Sebastian Bach.

In un quarto di secolo pubblicò ben 380 articoli, oltre che le sue due opere principali *l'Introductio in analysin infinitorum* (1748) e le *Institutiones calculi differentialis* (1755).

In quel periodo Euler fece anche da tutore alla principessa di Anhalt-Dessau, nipote di Federico. Le scriverà oltre 200 lettere riguardanti le scienze. Furono pubblicate in un libro che vendette moltissimo: *Lettere a una principessa tedesca*. Il libro, la cui popolarità testimonia una forte capacità divulgatrice di Euler, fornisce anche molte informazioni sulla sua personalità e sulle sue credenze religiose.

Nonostante la sua presenza conferisse un enorme prestigio all'Accademia, Euler dovette allontanarsi da Berlino per un conflitto con il Re. Quest'ultimo, infatti, lo riteneva troppo poco raffinato per la sua corte che, tra le altre personalità, alloggiava addirittura Voltaire. Euler era un religioso semplice e un gran lavoratore e aveva idee e gusti molto convenzionali. Tutto l'opposto di Voltaire e questo lo rendeva bersaglio delle battute del filosofo.

### Deterioramento della vista



Ritratto di Euler di Emanuel Handmann, dove si nota la cecità all'occhio destro

La vista di Euler peggiorò molto durante la sua carriera. Dopo aver sofferto di una febbre cerebrale, nel 1735 diventò quasi cieco all'occhio destro. Tra le cause di questa cecità, Euler annoverò il lavoro scrupoloso di cartografia che effettuò per l'Accademia di San Pietroburgo. La vista di Euler da quell'occhio peggiorò così tanto durante il suo soggiorno in Germania che Federico II lo soprannominò "il

mio Ciclope". Successivamente Euler soffrì di cataratta all'occhio sinistro, e questo lo rese quasi completamente cieco. Nondimeno, il suo stato ebbe scarso effetto sul suo rendimento: compensò la vista con le sue abilità mentali di calcolo e memoria fotografica. Per esempio, Euler poteva ripetere l'Eneide di Virgilio dall'inizio alla fine senza esitazione e dire la prima e l'ultima riga di ogni pagina dell'edizione in cui l'aveva imparata. Dopo la perdita della vista, Euler fu aiutato da Nicolaus Fuss, che gli fece da segretario.

### **Ritorno in Russia**

In Russia la situazione politica si stabilizzò e Caterina la Grande, salita al potere nel 1766, lo invitò a San Pietroburgo. Egli accettò e ritornò in Russia dove restò fino alla morte.

Il suo soggiorno fu inizialmente funestato da un evento tragico: nel 1771, mentre lavorava nel suo studio, per San Pietroburgo si propagò un incendio. Euler, praticamente cieco, non se ne accorse fino a quando il suo ufficio non fu completamente avvolto dalle fiamme. Fu portato fortunatamente in salvo insieme con gran parte della sua biblioteca, ma tutti i suoi appunti andarono in fumo.

Nel 1773 perse la moglie Katharina, dopo quarant'anni di matrimonio. Si risposò tre anni dopo.

Il 18 settembre 1783, in una giornata come le altre, in cui discusse del nuovo pianeta Urano appena scoperto, scherzò col nipote e gli fece lezione, fu colto improvvisamente da un'emorragia cerebrale e morì poche ore dopo. Aveva 76 anni.

Il suo elogio funebre fu scritto da Nicolaus Fuss e dal filosofo e matematico Marquis de Condorcet, che commentò sinteticamente:

*...il cessa de calculer et de vivre.*

## PANORAMICA

Euler è stato senz'altro il più grande fornitore di "denominazioni matematiche", offrendo il suo nome a una quantità impressionante di formule, teoremi, metodi, criteri, relazioni, equazioni.

In geometria: il cerchio, la retta e i punti di Euler relativi ai triangoli, più la relazione di Euler-Slim, che riguardava il cerchio circoscritto a un triangolo;

nella teoria dei numeri: il criterio di Euler e il teorema di Fermat-Euler, l'indicatore di Euler, l'identità di Euler, la congettura di Euler;

nella meccanica: gli angoli di Euler, il carico critico di Euler (per instabilità);

nell'analisi: la costante di Euler-Mascheroni, la funzione gamma di Euler;

in logica: il diagramma di Euler-Venn;

nella teoria dei grafi: (di nuovo) la relazione di Euler;

nell'algebra: il metodo di Euler (relativo alla soluzione delle equazioni di quarto grado), il teorema di Euler;

nel calcolo differenziale: il metodo di Euler (riguardante le equazioni differenziali).

Sempre a Euler si legano altri oggetti matematici, attraverso l'aggettivo "euleriano", quali: il ciclo euleriano, il grafo euleriano, la funzione euleriana di prima specie o funzione beta, e quella di seconda specie o funzione gamma, la catena euleriana di un grafo senza anse, i numeri euleriani (differenti dai numeri di Euler).

Anche se fu prevalentemente un matematico diede importanti contributi alla fisica e in particolare alla meccanica classica e celeste. Per esempio sviluppò l'equazione delle travi di Euler-Bernoulli e le equazioni di Euler-Lagrange. Inoltre determinò le orbite di molte comete.

Euler tenne contatti con numerosi matematici del suo tempo; in particolare tenne una lunga corrispondenza con **Christian Goldbach** confrontando con lui alcuni dei propri risultati. Egli inoltre seppe coordinare il lavoro di altri matematici che gli furono vicini: i figli Johann Albrecht Euler e Christoph Euler, i membri dell'Accademia di San Pietroburgo W. L. Krafft e Anders Johan Lexell e il suo segretario Nicolaus Fuss (che era anche il marito di sua nipote); a tutti i collaboratori riconobbe i meriti.

## ALCUNE NOTAZIONI

Buona parte della simbologia matematica tuttora in uso venne introdotta da Euler.

- la lettera  $e$  come base per i logaritmi naturali (1727); Eulero dimostra che è irrazionale nel 1737
- la lettera  $\pi$  per indicare il rapporto tra ogni circonferenza e il suo diametro
- $i$  per l'unità immaginaria
- $\Sigma$  come simbolo per la sommatoria
- $f(x)$  per indicare una funzione di  $x$
- la costante  $\gamma$  di Eulero–Mascheroni, dove

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

## CENNI SULL'OPERA

- Complessivamente esistono 886 pubblicazioni di Euler, tra libri e articoli. La loro pubblicazione è ancora in corso, a cura del governo svizzero. Sono previsti circa 75 volumi.

- Pubblica moltissimo sui *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, la nuova rivista dell' Accademia imperiale delle scienze di San Pietroburgo.

- Saggio sull'alberatura delle navi: premio dell'Académie des Sciences di Parigi

- *Mechanica, sive Motus scientia analytice exposita* (1736)

- L'**analisi** era il campo di studio principale del XVIII secolo e i Bernoulli, amici di Eulero, erano i principali esperti del settore. Scopo principale di Eulero era effettuare operazioni ancora non ben formalizzate, quali somme e prodotti di un numero infinito di numeri. Benché tali operazioni fossero al tempo mancanti di una solida base formale (data oggi dal concetto di limite di una successione e dalla struttura assiomatica dei numeri reali) e le sue dimostrazioni non fossero quindi completamente rigorose, portarono comunque a numerosi risultati corretti che fecero fare all'analisi un decisivo balzo in avanti.

Eulero introdusse dapprima il concetto di funzione, l'uso della funzione esponenziale e dei logaritmi. Trovò i modi di esprimere le varie funzioni logaritmiche in termini di serie e definì i logaritmi per i numeri complessi e negativi, espandendone notevolmente la portata.

Eulero calcolò quindi il risultato di un certo numero di serie importanti, anche se a quel tempo il significato di "somma e/o prodotto di infiniti termini" non era ancora rigorosamente formalizzato.

- *Introductio in analysin infinitorum* (1748) - 2 volumi

- Inizia con quest'opera lo studio delle funzioni come oggetto dell'analisi.

- Dagli sviluppi in serie di  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$  deduce le *formule di Eulero*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

- Dalla prima di queste formule, nota come *identità di Eulero*, segue, nel caso particolare  $x = \pi$ , che

$$e^{i\pi} = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln(-1) = i\pi.$$

Osserva, in generale, che qualsiasi numero positivo o negativo ha infiniti logaritmi e che i logaritmi di numeri complessi sono numeri complessi.

Tuttavia, potenze immaginarie di numeri immaginari possono essere reali:  $i^i = e^{-\pi/2}$  (1746).

- Calcola serie importanti, come

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

e nel 1735 risolve il *problema di Basilea*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Calcola anche la serie analoga ma relativa agli interi dispari

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

- Dimostra che la divergenza della serie armonica implica l'infinità dei numeri primi.

- Una sorprendente serie di Eulero, che si potrebbe chiamare "serie armonica corretta", mette in relazione  $\pi$  greco con gli inversi di tutti i numeri naturali:

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \dots$$

I segni dei termini, dopo i primi due, si determinano come segue:

- il denominatore è un numero primo del tipo  $(4m-1)$ : segno +;
- il denominatore è un numero primo del tipo  $(4m+1)$ : segno -;
- il denominatore è un numero composto: prodotto dei segni dei singoli fattori.

La sua convergenza è molto lenta, non adatta per i calcoli, ma rimane comunque tra le più eleganti serie che convergono a  $\pi$ .

- *Institutiones calculi differentialis* (1755)
- *Institutionum calculi integralis* (1768-1794), 4 vol.



- Il grande interesse di Eulero alla **Teoria dei numeri** fu acceso dal suo amico **Christian Goldbach**. Molto del suo lavoro in questo ambito riguarda la dimostrazione (o confutazione) delle molte congetture di **Pierre de Fermat**.

Eulero provò la correlazione tra numeri primi e *funzione zeta di Riemann* scoprendo la formula prodotto di Eulero.

Provò poi le *identità di Newton* il *teorema di Fermat sulle somme di due quadrati* e diede importanti contributi alla risoluzione del *teorema dei quattro quadrati* e alla comprensione dei numeri perfetti.

Dimostrò il *Piccolo Teorema di Fermat*:  $p$  primo e  $a \in \mathbb{N}$  tale che  $(a, p) = 1$ , allora  $a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$ .

Inventò la funzione  $\Phi$  che assegna a ogni numero naturale  $n$  il numero degli interi coprimi con  $n$  e minori di  $n$ . Chiaramente, se  $p$  è primo allora  $\Phi(p) = p - 1$ . Quindi il PTF si può enunciare, sotto le precedenti ipotesi, come  $a^{\Phi(p)} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .

Con la funzione  $\Phi$  generalizzò il PTF e il risultato è noto come *Teorema di Eulero*.

Siano  $m, a \in \mathbb{N}$  tale che  $(a, m) = 1$ , allora  $a^{\Phi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ .

Eulero congetturò inoltre la

*Legge della reciprocità quadratica*. Siano  $p \neq q$  numeri primi dispari.

i) Se almeno uno di essi è congruo a 1 (mod 4), allora la congruenza

$$x^2 \equiv p \pmod{q}$$

ha una soluzione  $x$  se e solo se la congruenza

$$y^2 \equiv q \pmod{p}$$

ha una soluzione  $y$  (le due soluzioni in genere saranno differenti).

ii) Se invece entrambi  $p$  e  $q$  sono congrui a 3 (mod 4), allora

$$x^2 \equiv p \pmod{q}$$

ha una soluzione  $x$  se e solo se la congruenza

$$y^2 \equiv q \pmod{p}$$

non ha alcuna soluzione.

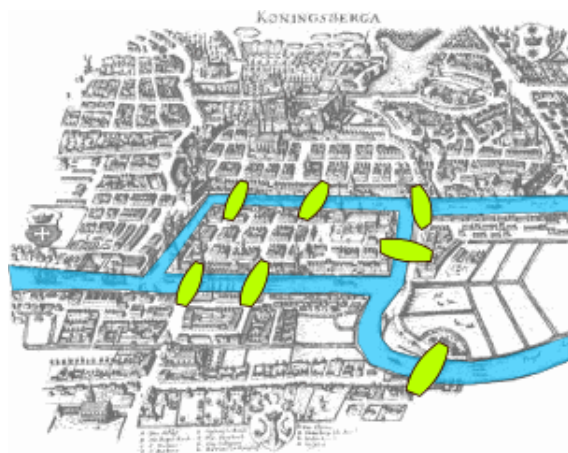
Fu dimostrata in maniera soddisfacente da **Karl Friederich Gauss** nel 1796. Gauss fu assai fiero di tale legge, da lui definita *Aureum Theorema*, tanto che negli anni ne pubblicò svariate dimostrazioni.

Uno dei più grandi successi di Eulero in questo campo fu però la dimostrazione dell'*Ultimo teorema di Fermat* per il caso particolare in cui  $n = 3$ , ossia la dimostrazione che la somma di due cubi non

può essere uguale a un cubo. Questa dimostrazione è effettuata per discesa infinita e fa uso anche dei numeri complessi.

Nella fitta corrispondenza con Goldbach appare una questione irrisolta, chiamata in seguito *Congettura di Goldbach* (ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi, eventualmente uguali).

- Contributi notevoli di Eulero sono anche in **Teoria dei grafi e topologia**. Nel 1736 Eulero risolse il *problema dei ponti di Königsberg*. La città di Königsberg (ora Kaliningrad) è percorsa dal fiume Pregel e da suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. La questione è se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una volta sola e tornare al punto di partenza. Eulero dimostrò che la passeggiata ipotizzata non era possibile a causa del numero dispari di nodi che congiungevano gli archi (ossia delle strade che congiungevano i ponti). La soluzione di Eulero diede origine alla teoria dei grafi, che si sarebbe poi evoluta dando origine alla topologia.



- Eulero introdusse poi la *formula di Eulero per i poliedri convessi* che mette in relazione il numero  $V$  dei vertici, il numero  $S$  degli spigoli e il numero  $F$  delle facce:

$$V - S + F = 2$$

Più in generale, il numero  $\chi = V - S + F$  è una costante importante in topologia. Fu estesa successivamente da Poincaré a molti oggetti topologici e chiamata poi *caratteristica di Eulero-Poincaré*.

• *Algebra*: manuale molto diffuso, pubblicato in tedesco (1770), russo (1772), francese (1774), ecc...

- Eulero diede anche importanti contributi alla **geometria analitica**, come la formulazione delle equazioni che descrivono il cono, il cilindro, e le varie superfici di rotazione. Fu il primo a considerare tutte le curve insieme senza una predilezione per le coniche e a studiare a fondo anche le curve generate da funzioni trascendenti come la sinusoidale. Svolse anche un importante lavoro di classificazione delle curve e delle superfici. Nell'*Introductio* si trova poi una completa ed esauriente trattazione delle coordinate polari che vengono espone nella forma moderna. Perciò, ancora oggi, spesso si indica erroneamente Eulero come l'inventore di questo sistema di notazione.

Dimostrò anche un paio di semplici teoremi di geometria pura, come per esempio l'affermazione che il circocentro, il baricentro e l'ortocentro di un triangolo sono sempre allineati. In suo onore tale retta fu chiamata *retta di Eulero*.

