Esercitazioni di “Geometria”
Foglio 6

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

22 novembre 2024

“La pratica è la verifica della teoria

Esercizi 1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici, a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix}; A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}; A_9 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suggerimento: se la i-esima riga\$j$-esima colonna di una matrice M è moltiplicata per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$...

Esercizi 2. Calcolare la matrice inversa delle precedenti matrici, ove possibile, determinando esplicitamente la matrice dei cofattori.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizi 3. Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan, calcolare la matrice inversa delle seguenti matrici a coefficienti reali\complessi, ove possibile.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ 8 & -1 & -4 \end{pmatrix},\ A_9 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -11 & 9 \\ -1 & -4 & 10 & -5 \end{pmatrix},\ A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, calcolare $A_{11} \times^t A_{11}, ^t A_{11} \times A_{11}$.

Note finali.

a) La matrice A_4 è una *matrice di Pauli.*

b) Le matrici A_2 e A_{11} sono *matrici di Hadamard.*

c) Le matrici A_3 e A_9 sono *matrici di Hilbert.*

Esercizio 4. Ripetere il precedente esercizio, considerando le precedenti matrici, esclusa la matrice A_4, a coefficienti nel campo $\mathbb{F}_7$.