Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 8

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

13 novembre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Dati i seguenti sistemi di vettori di $\mathbb{R}^4$

$$S_1 = \{(1,0,1,0), (-1,-1,0,0), (0,1,-1,0)\},\ S_2 = \{(1,0,0,-1), (1,-1,-1,1), (0,1,1,2)\},$$
$$S_3 = \{(0,1,-1,1), (1,-1,1,0), (1,0,1,-1)\}, S_4 = \left\{\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\right), (-1,0,1,0),\right.$$
$$\left.(2,-1,-1,2), (1,1,1,1)\right\},\ S_5 = \{(1,1,1,-1), (1,1,-1,0), (1,-1,0,1), (2,2,0,-1), (2,0,-1,1), (3,1,0,0)\};$$

a) calcolare la dimensione di $\langle S_k \rangle$, e determinarne una base $\mathcal{B}_{S_k}$;

b) completare $\mathcal{B}_{S_k}$ a una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$;

c) determinare una rappresentazione cartesiana e parametrica di $\langle S_k \rangle$.

Si rammenta che $k \in \{1, \ldots, 5\}$.

Esercizio 2. Date le seguenti applicazioni lineari di spazi vettoriali

$$f_1\colon (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \to (2t - x + z, 3x - 2y + t, t - x + y - z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$f_2\colon (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \to (t - x, y - z, t - x + y - z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$f_3\colon (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \to (2t - x, y + 3z + x, x - 3y + 2t) \in \mathbb{R}^3,$$
$$f_4\colon (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \to (3x - 4z + 2t, x - 4t + 3y, y - z + t) \in \mathbb{R}^3,$$
$$f_5\colon (t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \to (2y - z, z + 4x, 3x - 2t) \in \mathbb{R}^3,$$
$$f_6\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (2y + z - x, 2x - z + y, -2z - x - y, 4y - 2x + z) \in \mathbb{R}^4,$$
$$f_7\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (3z - 3x, 2x - 2y, y + z, 2x + z) \in \mathbb{R}^4,$$
$$f_8\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x - y + z, y - z + x, z - x + y, -x - y - z) \in \mathbb{R}^4,$$

$$f_9\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2 \to^t \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2,$$

$$f_{10}\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2 \to^t \left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2,$$

$$f_{11}\colon (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to^t \left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)\in\mathbb{R}^3;$$

a) calcolare il nucleo e l'immagine di f_k, le dimensioni e una base per ciascuno;

b) determinare una rappresentazione cartesiana e parametrica dei precedenti sottospazi vettoriali;

c) determinare se e quali funzioni sono iniettive, suriettive o biettive.

Si rammenta che $k \in \{1, \ldots, 11\}$.

Domanda: le precedenti risposte dipendono dal campo dei numeri reali?