Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 9

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

20 novembre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizi 1. Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan, calcolare la matrice inversa delle seguenti matrici, ove possibile.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ 8 & -1 & -4 \end{pmatrix},\ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -11 & 9 \\ -1 & -4 & 10 & -5 \end{pmatrix},\ A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, calcolare $A_{10} \times^t A_{10}, ^t A_{10} \times A_{10}$.

Esercizio 2. In $\mathbb{C}^2$, si considerino la base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$, la base $\{(1, i), (1, -i)\}$ e l'endomorfismo lineare f tale che:

$$f(\underline{e}_1) = \underline{e}_2,\ f(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1.$$

Siano $\mathfrak{R}_{can}$ e $\mathfrak{R}_H$ i riferimenti vettoriali (ovviamente) associati ad esse

a) Calcolare la matrice A rappresentante f rispetto a $\mathfrak{R}_{can}$.

b) Calcolare la matrice A_{can}^{H} rappresentante f rispetto a $\mathfrak{R}_{can}$ ed a $\mathfrak{R}_H$.

c) Calcolare la matrice A_{H}^{can} rappresentante f rispetto a $\mathfrak{R}_H$ ed a $\mathfrak{R}_{can}$.

Come sono coniugate tra di loro le precedenti matrici?

Esercizio 3. Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale complesso di dimensione 3 e $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ una sua base.

a) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} - \underline{v} + \underline{w}\}$ è una base di $\mathbb{V}$;

b) dimostrare che esiste un unico automorfismo lineare di $\mathbb{V}$ tale che:

$$f(\underline{u}) = \underline{v},\ f(\underline{v}) = \underline{w},\ f(\underline{w}) = \underline{u} - \underline{v} + \underline{w}.$$

c) Rappresentare f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 4. Senza cambiare le notazioni dall'esercizio precedente, si determini un endomorfismo lineare g di $\mathbb{V}$ tale che:

$$\ker(g) = \langle \underline{u} - \underline{v} + \underline{w} \rangle,\ \mathrm{Im}(g) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle.$$

Rappresentare g rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 5. Siano $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$ ed f il suo endomorfismo lineare rappresentato (canonicamente) dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-4i \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0), (1,2,0), (1,2,1)\}$ sono basi di $\mathbb{C}^3$;

b) determinare le rappresentazioni di f rispetto alle precedenti basi.

Esercizio 6. Data la seguente funzione

$$\sigma_{-1} \colon f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to f(x-1) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

a) Dimostrare che σ_{-1} è un endomorfismo lineare di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;

b) dimostrare che $\mathcal{B} = \{1, -1+x, 1-x^2, 1+x^3\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;

c) rappresentare σ_{-1} rispetto alle basi canoniche e $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.