ESERCIZI SU DIAGONALIZZAZIONE
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

(i) **Scrivi** la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f associata alla base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.
(ii) **Calcola** il polinomio caratteristico di f.
(iii) **Determina** lo spettro di f.
(iv) **Decidi** se f sia diagonalizzabile o meno.
(v) Nel caso in cui f sia diagonalizzabile, **determina** una base $\mathcal{B}$ di autovettori di f e **calcola** le due matrici del cambiamento di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(1)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7x+2y+14z \\ 10x+3y+22z \\ -5x-y-10z \end{pmatrix}$$

(2)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x-2y+2z \\ 3x+z \\ -3y+6z \end{pmatrix}$$

(3)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -8x+6z \\ -4x-y+5z \end{pmatrix}$$

(4)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+5y-z \\ 5y-z \\ 9y-z \end{pmatrix}$$

(5)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x-3y+9z \\ -9x-7y+27z \\ -3x-3y+11z \end{pmatrix}$$

(6)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -11x-6y+6z \\ 20x+13y-4z \\ -5x-3y+2z \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Considera una generica applicazione lineare:

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \end{array}$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sono generici numeri reali. Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^2$ e considera la matrice associata $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. **Dimostra** che, se denotiamo con $p_f(\lambda)$ il polinomio caratteristico di f, allora $p_f(\lambda)$ si può scrivere come

$$p_f(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}\big(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\big) + \det\big(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\big)\,,$$

dove $\operatorname{tr}(\cdot)$ è la *traccia* di una matrice, ovvero la somma degli elementi sulla diagonale.

Esercizio 3

Dimostra che due matrici simili hanno lo stesso determinante.

Esercizio 4

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^n$. **Dimostra** che $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L_A)$.

Esercizio 5

Sia $f\colon V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Supponiamo che f sia diagonalizzabile. **Dimostra** che l'applicazione lineare $f \circ f$, ottenuta componendo f con se stessa, è anch'essa diagonalizzabile.