Identità di Parseval

Vogliamo dimostrare che data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, con $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, vale che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$||\hat{f}||_2 = \sqrt{2\pi}\, ||f||_2 \ . \tag{1}$$

Seguiremo (spiegandone i dettagli) la dimostrazione in [1], teorema 9.13.

Definiamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data dal prodotto di convoluzione

$$g = f \star \underline{f} \ , \tag{2}$$

dove $\star$ è il prodotto di convoluzione e la funzione $\underline{f}$ è definita da

$$\underline{f}(t) = f^*(-t) \ . \tag{3}$$

Il fatto che $f \in L^1(\mathbb{R})$ implica che anche $\underline{f}$ lo sia, e dunque g è ben definita ed è anch'essa in $L^1(\mathbb{R})$ essendo prodotto di convoluzione di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Dalla definizione del prodotto di convoluzione abbiamo

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(t') f^*(t' - t) \ . \tag{4}$$

Ricordando la definizione del prodotto hermitiano in $L^2(\mathbb{R})$

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1^*(t') f_2(t') \ , \tag{5}$$

e dell'operatore di traslazione

$$T_x[f](y) = f(y + x) \ , \tag{6}$$

notiamo che $g(t)$ può anche essere espressa come

$$g(t) = (T_{-t}[f], f) \ . \tag{7}$$

Questa riscrittura ci permette di provare due cose su g: (i) che è una funzione limitata; (ii) che è una funzione continua.

Per (i) basta usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|g(t)| \leq ||T_{-t}[f]||_2\, ||f||_2 = ||f||_2^2 \ . \tag{8}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato che la norma L^2 è invariante sotto traslazioni, come è facile verificare utilizzando un cambio di variabile nella definizione della norma.

Per (ii) dobbiamo utilizzare che l'operatore traslazione, visto come funzione da $t \in \mathbb{R}$ a $L^2(\mathbb{R})$ per una data f fissata, è una funzione continua di t. In simboli, data $f \in L^2(\mathbb{R})$ fissata definiamo la funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_f &: \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}) \ , \\ \mathcal{T}_f(t) &= T_{-t}[f] \ , \end{aligned} \tag{9}$$

e la funzione $\mathcal{T}_f$ è continua.[1] D'altra parte, la formula (7) ci dice che la funzione $g(t)$ si può vedere come composizione della funzione $\mathcal{T}_f$ con la funzione da $L^2(\mathbb{R})$ a $\mathbb{C}$ che consiste nel prendere il prodotto scalare con f. Quest'ultima è anche una funzione continua (come abbiamo mostrato in classe) e pertanto $g(t)$ è continua essendo composizione di funzioni continue.

Ora che abbiamo dimostrato queste proprietà di g, procediamo introducendo la funzione

$$h_T(t) = \frac{T}{t^2 + T^2} \ , \tag{10}$$

dove T è un parametro reale positivo, e calcolando la quantità

$$\lim_{T\to 0} (h_T \star g)(0) \ , \tag{11}$$

in due modi diversi.

Modo 1: Scriviamo esplicitamente il prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned} (h_T \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{T}{(t-t')^2 + T^2}\, g(t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta \frac{1}{1+\delta^2}\, g(t+\delta T) \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabili $t' = t + \delta\, T$, ovvero $\delta = \frac{t'-t}{T}$. Grazie alla continuità della funzione $g(t)$ nel limite $T \to 0$ la funzione integranda tende puntualmente a

$$\frac{1}{1+\delta^2}\, g(t+\delta T) \underset{T\to 0}{\to} \frac{1}{1+\delta^2}\, g(t) \ , \tag{13}$$

e inoltre per qualsiasi T la funzione $\frac{1}{1+\delta^2}\, g(t+\delta T)$ è minore in valore assoluto di $\frac{C}{1+\delta^2}$, per una certa costante C, dato che $|g(t)|$ è limitata. Visto che la funzione $\frac{C}{1+\delta^2}$ è integrabile su $\mathbb{R}$, possiamo usare il teorema della convergenza dominata e passare al limite sotto il segno di integrale, trovando

$$\lim_{T\to 0} (h_T \star g)(t) = g(t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta \frac{1}{1+\delta^2} = \pi\, g(t) \ . \tag{14}$$

In particolare troviamo

$$\lim_{T\to 0} (h_T \star g)(0) = \pi\, g(0) = \pi\, ||f||_2^2 \ . \tag{15}$$

Modo 2: Usiamo il fatto (visto a lezione) che h_T si può scrivere come la trasformata di una funzione esponenziale, ovvero

$$h_T(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-T|\omega|}\, e^{i\omega t} \ . \tag{16}$$

[1] Questo segue dal fatto che, se f fosse una funzione continua, questo operatore sarebbe senz'altro continuo rispetto alla norma del sup, per via della continuità di f. Possiamo quindi dimostrarlo per $L^2(\mathbb{R})$ usando che le funzioni continue con un dominio compatto sono dense in $L^2(\mathbb{R})$, e per tali funzioni la distanza in $L^2(\mathbb{R})$ si può maggiorare come una costante per la distanza in norma del sup.

Allora abbiamo

$$
\begin{aligned}
(h_T \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{-T|\omega|} \, e^{i\omega(t'-t)} \right) g(t') \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{-T|\omega|} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' g(t') e^{i\omega t'} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{-T|\omega|} e^{i\omega t} \, \hat{g}(\omega) \; .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Nel secondo passaggio abbiamo scambiato gli integrali in dt' e in $d\omega$. Questo è possibile grazie al teorema di Fubini-Tonelli, perché la funzione di due variabili (ω, t') data da $e^{-T|\omega|} \, e^{i\omega(t'-t)} \, g(t')$ è integrabile in valore assoluto su $\mathbb{R}^2$, grazie al fatto che $g \in L^1(\mathbb{R})$ e l'esponenziale decresce velocemente per grande $|\omega|$. Usando che la trasformata di Fourier mappa il prodotto di convoluzione nel prodotto ordinario, abbiamo che

$$
\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \widehat{\underline{f}}(\omega) \; . \tag{18}
$$

Notiamo che

$$
\begin{aligned}
\widehat{\underline{f}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} f^*(-t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega t'} f^*(t') = \hat{f}(\omega)^* \; ,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

dove nel secondo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile $t' = -t$. Dunque

$$
\hat{g}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2 \geq 0 \; , \tag{20}
$$

e abbiamo che

$$
(h_T \star g)(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{-T|\omega|} \, |\hat{f}(\omega)|^2 \; . \tag{21}
$$

Dobbiamo ora prendere il limite $T \to 0$, e per fare questo ricorriamo al seguente teorema sull'integrale di Lebesgue (non visto a lezione):

Teorema della convergenza monotona: *Data una successione di funzioni* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *integrabili, con* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}$, *e tale che* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *allora esiste l'integrale di* f *come numero in* $[0, +\infty]$ *(nota: può anche valere* $+\infty$*) e vale:*

$$
\lim_{n\to\infty} \int dx \, f_n(x) = \int dx \, f(x) \; . \tag{22}
$$

Dato che le funzioni $e^{-T|\omega|} \, |\hat{f}(\omega)|^2$ sono tutte positive e crescono nel limite $T \to 0$ (ricorda che T è un parametro positivo), questo teorema ci permette di passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere

$$
\lim_{T\to 0} (h_T \star g)(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, |\hat{f}(\omega)|^2 \; . \tag{23}
$$

Nota che il teorema non ci assicura che quest'ultimo integrale sia finito. Però ora possiamo utilizzare che abbiamo già calcolato questa quantità nel Modo 1, vedi eq. (15), per concludere che questo integrale è finito, e dunque $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e il risultato dell'integrale è

$$\lim_{T \to 0} (h_T \star g)(0) = \frac{1}{2} ||\hat{f}||_2^2 \ , \tag{24}$$

e infine confrontando questa equazione con eq. (15) otteniamo il risultato desiderato

$$||\hat{f}||_2^2 = 2\pi ||f||_2^2 \ . \tag{25}$$

References

[1] W. Rudin, *Real and complex analysis.* Tata McGraw-hill education, 2006.