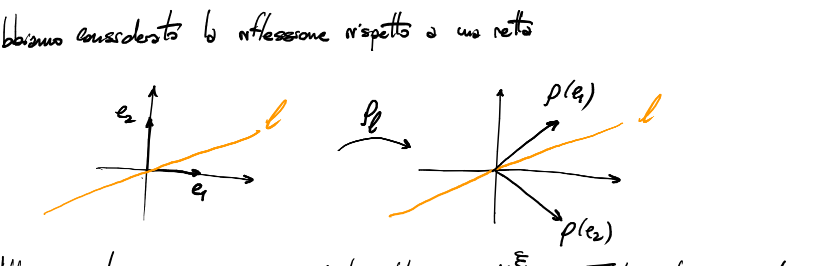
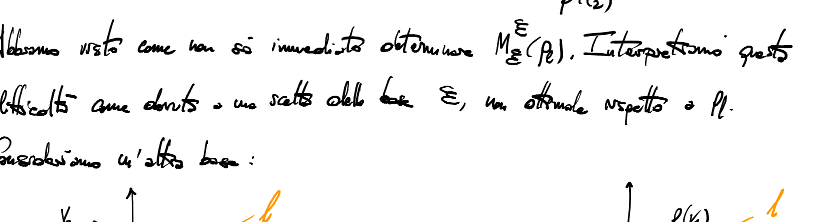
Abbiamo considerato la riflessione rispetto a una retta



Abbiamo visto come non sia immediato determinare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\rho_l)$. Interpretiamo questa difficoltà come dovuta a una scelta della base $\mathcal{E}$, non ottimale rispetto a ρ_l.
Consideriamo un'altra base:



Con una scelta di questo tipo (ovvero v_1 sulla retta l e v_2 perpendicolare alla retta l) abbiamo che

$$\rho_l(v_1) = v_1 \qquad e \qquad \rho_l(v_2) = -v_2$$

Per cui se scegliamo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ come base di $\mathbb{R}^2$, allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\rho_l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo quindi che scegliendo opportunamente una base otteniamo una matrice assai semplice. Notiamo che i vettori che costituiscono questa base "buona" sono mandati da ρ_l in multipli di se stessi. Questa sarà l'idea chiave.

Def.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita; uno scalare $\lambda \in K$ si dice *autovalore* (in inglese *eigenvalue*) per f se esiste $v \in V$ con $v \neq 0$ tale per cui $f(v) = \lambda \cdot v$

Oss.: considerando l'applicazione ρ_l di prima vediamo che:
- $1 \in \mathbb{R}$ è autovalore dato che $\rho_l(v_1) = 1 \cdot v_1$ e $v_1 \neq 0$
- $-1 \in \mathbb{R}$ è autovalore dato che $\rho_l(v_2) = (-1) \cdot v_2$ e $v_2 \neq 0$.

Def.: data una applicazione lineare f come sopra, l'insieme degli autovalori di f si dice *spettro* di f e si indica $Sp(f)$.

Def.: sia f un'applicazione lineare come sopra e sia $\lambda \in K$ un autovalore di f; diciamo che $v \in V$ è un *autovettore* per f *relativo all'autovalore* λ se vale che $f(v) = \lambda \cdot v$; l'insieme di tutti gli autovalori di f relativi a λ si dice *autospazio* di λ e si indica con $Aut(\lambda)$.

Oss.: notiamo che, affinché $\lambda \in K$ sia autovalore di f, deve esistere $v \in V$ con $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda \cdot v$; una volta stabilito che $\lambda \in K$ è un autovalore consideriamo autovettore rispetto a λ *ogni* $w \in V$ tale che $f(w) = \lambda \cdot w$; in particolare vale sempre che

$$f(0) = 0 \quad , \text{ovvero} \quad f(0) = \lambda \cdot 0$$

pertanto $0 \in V$ è sempre autovettore rispetto a ogni autovalore.

Prop.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e sia $\lambda \in Sp(f)$, ovvero $\lambda \in K$ è un autovalore per f; allora $Aut(\lambda) \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale.

Dim.: sia $\lambda \in Sp(f)$, dimostriamo che $Aut(\lambda)$ è sottospazio vettoriale
1. abbiamo già visto che $0 \in V$ è sempre autovettore di λ, dunque $0 \in Aut(\lambda)$.
2. siano $v, w \in Aut(\lambda)$, dimostriamo che $v + w \in Aut(\lambda)$; per ipotesi
$$f(v) = \lambda \cdot v \qquad e \qquad f(w) = \lambda \cdot w$$
ora, verificare che $v+w \in Aut(\lambda)$ significa verificare che $f(v+w) = \lambda \cdot (v+w)$; calcoliamo:
$$f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w = \lambda \cdot (v+w)$$
3. sia $v \in Aut(\lambda)$ e sia $\mu \in K$; dobbiamo verificare che $\mu \cdot v \in Aut(\lambda)$; per ipotesi $f(v) = \lambda \cdot v$, e quindi
$$f(\mu \cdot v) = \mu \cdot f(v) = \mu \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$
quindi $\mu \cdot v \in Aut(\lambda)$.

Prop.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e siano $\lambda_1, \lambda_2 \in Sp(f)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$; siano $v_1 \in Aut(\lambda_1)$ e $v_2 \in Aut(\lambda_2)$ con $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$; allora v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

L'obiettivo di questa sezione sarà capire, data $f: V \to V$ applicazione lineare con $\dim V$ finita, se sia possibile costruire una base di V tutta formata da autovettori di f. In tal caso, infatti, la matrice associata a tale base sarà *diagonale*.

Def.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita, allora f si dice *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.

Oss.: ricordiamo che se $f: V \to V$ è un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ sono basi di V e scriviamo

$$N = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \qquad e \qquad N' = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$$

allora

$$N' = P^{-1} \cdot N \cdot P$$

dove P è una matrice invertibile (ed è una matrice di cambio di base), pertanto possiamo dire che f è diagonalizzabile se e solo se, data una base $\mathcal{B}$ di V, allora la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è simile a una matrice diagonale, ovvero se esiste P invertibile tale che $P^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$ è diagonale.

Prop.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita, allora f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base $\mathcal{B}$ di autovettori di f.

Dim.: "$\Leftarrow$" sia $\mathcal{B}$ una base di autovettori di f, allora $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e vale che $\forall i$; $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ per certi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ (non necessariamente distinti); allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ovvero f è diagonalizzabile
"$\Rightarrow$" se f è diagonalizzabile, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

allora per definizione $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ per ogni i e dato che $v_i \neq 0$ per ogni i, tali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono autovalori e dunque $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori.

Come determinare gli autovalori di un'applicazione lineare? Per farlo andiamo a ripensare allo stesso concetto in maniera differente.
Sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e sia $\lambda \in K$ un autovalore di f, ovvero esiste $v \in V$, $v \neq 0$, tale che $f(v) = \lambda v$; notiamo che

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda \cdot v = 0 \iff$$
$$\iff f(v) - \lambda \cdot id_V(v) = 0$$
$$\iff \underbrace{(f - \lambda \cdot id_V)}_{:= f_\lambda}(v) = 0$$

Allora se definiamo $f_\lambda := f - \lambda \cdot id_V$, abbiamo che $f_\lambda : V \to V$ e vale che $v \in \ker(f_\lambda)$. Ora, dato che $v \neq 0$, allora $\ker(f_\lambda) \neq \{0\}$, ovvero f_λ non è iniettiva. Dato che f_λ va da V in se stesso, quest'ultimo fatto è equivalente a dire che f_λ non è biiettiva e dunque non è invertibile. Questo significa che, presa una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ non è invertibile. Ora,

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_\lambda) \text{ non è invertibile} \iff$$
$$\iff \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_\lambda) = 0$$
$$\iff \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot id_V)\right) = 0$$
$$\iff \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V)\right) = 0$$
$$\iff \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n\right) = 0$$

Pertanto gli autovalori di f sono tutti e soli gli scalari $\lambda \in K$ tali che

$$\det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n\right) = 0$$

Inoltre

$$\begin{aligned} Aut(\lambda) &= \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\} \\ &= \{v \in V : (f - \lambda \cdot id)(v) = 0\} \\ &= \{v \in V : f_\lambda(v) = 0\} \\ &= \ker(f_\lambda) \end{aligned}$$

Pertanto, essendo $Aut(\lambda)$ il nucleo di un'applicazione lineare abbiamo trovato un altro modo di dimostrare che $Aut(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale.

Def.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita, sia $\lambda \in K$ un autovalore per f; il numero

$$\dim Aut(\lambda)$$

è detto la *molteplicità geometrica* dell'autovalore λ.

Def.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e consideriamo ora λ come una variabile; formiamo il determinante

$$\det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n\right)$$

dove $\mathcal{B}$ è una qualsiasi base di V; questo determinante è un polinomio in λ a coefficienti in K ed è detto il *polinomio caratteristico* di f ed è denotato P_f; i suoi zeri (ovvero le sue radici) sono quei valori $\bar{\lambda} \in K$ tali per cui $\det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \bar{\lambda} \cdot \mathbb{1}_n\right) = 0$, ovvero sono gli autovalori di f

Esempio: consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

ora consideriamo la base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ e

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico di f è dunque

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= \det\left(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_2\right) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 = \\ &= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda \end{aligned}$$

quindi gli autovalori di f sono gli zeri di P_f, ovvero i $\bar{\lambda} \in K$ tali che $P_f(\bar{\lambda}) = 0$; dato che

$$P_f(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 3)$$

pertanto gli zeri di P_f sono $\{0, 3\}$ e quindi $Sp(f) = \{0, 3\}$; esistono pertanto vettori non nulli v_1 e v_2 in $\mathbb{R}^2$ tali per cui

$$v_1 \in Aut(0) \iff f(v_1) = 0 \qquad e \qquad v_2 \in Aut(3) \iff f(v_2) = 3v_2$$

dato che vettori non nulli relativi a autovalori distinti sono linearmente indipendenti, otteniamo che $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti e dunque $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, che quindi è una base di autovettori di f, pertanto f è diagonalizzabile; per determinare tali v_1, v_2 ci ricordiamo che $v_1 \in \ker(f_0)$ e $v_2 \in \ker(f_3)$

Def.: sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e sia P_f il suo polinomio caratteristico; supponiamo che $\bar{\lambda} \in K$ sia un autovalore di f, ovvero $P_f(\bar{\lambda}) = 0$; per il teorema di Ruffini,

$$P_f(\bar{\lambda}) = 0 \iff P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot g(\lambda)$$

(ovvero ogni radice corrisponde a un fattore di grado 1); definiamo la *molteplicità algebrica* di $\bar{\lambda}$ come quel numero naturale $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda})^m \cdot \tilde{g}(\lambda)$$

e $\tilde{g}(\bar{\lambda}) \neq 0$.

Esempio: se $P_f(\lambda) = (\lambda - 5)^2 \cdot (\lambda + 1)^3$, allora le radici (o zeri) di P_f sono 5 e -1 e le loro molteplicità algebriche sono rispettivamente 2 e 3.

Notazione: dato un autovalore $\bar{\lambda}$, denotiamo

$$m_g(\bar{\lambda}) = \text{molteplicità geometrica di } \bar{\lambda}$$
$$m_a(\bar{\lambda}) = \text{molteplicità algebrica di } \bar{\lambda}.$$

Prop.: se $f: V \to V$ è un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e $\bar{\lambda} \in Sp(f)$ ovvero $\bar{\lambda}$ è un autovalore di f, allora $m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$