Oss.: se $f: V \to V$ è un'applicazione lineare e $\dim V = n$, allora P_f è un polinomio di grado n, quindi la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di f è al più n.

Teorema: (criterio di diagonalizzazione)

sia $f: V \to V$ un'applicazione lineare dove $\dim V$ è finita;
f è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. il polinomio P_f si scompone completamente in fattori di primo grado (non necessariamente distinti)
2. per ogni autovalore $\bar\lambda$ vale che $m_g(\bar\lambda) = m_a(\bar\lambda)$

(quindi 1. dice che $P_f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_k)^{m_k}$ e 2. dice che $m_i = \dim Aut(\alpha_i)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$)

Esempio: consideriamo la seguente applicazione lineare:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ -y \\ -3x + 2z \end{pmatrix}$$

allora se $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$ vale che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

cerchiamo di capire se f sia o meno diagonalizzabile;
calcoliamo il polinomio caratteristico P_f:

$$P_f(\lambda) = \det\left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_3\right) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (-1-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda) - 9\right] =$$
$$= (-1-\lambda) \cdot \left[(2-\lambda)^2 - 9\right] \qquad \left(A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)\right)$$
$$= (-1-\lambda)(2-\lambda+3)(2-\lambda-3) =$$
$$= -(\lambda+1)(5-\lambda)(-1-\lambda) =$$
$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

quindi gli autovalori di f (ovvero gli zeri di P_f) sono -1 e 5, ovvero $Sp(f) = \{-1, 5\}$; inoltre notiamo che P_f si scompone completamente in fattori lineari e vale che

$$m_a(-1) = 2 \qquad e \qquad m_a(5) = 1$$

per vedere se f sia diagonalizzabile verifichiamo se valga che

$$m_g(-1) = 2 \qquad e \qquad m_g(5) = 1$$

sicuramente $m_g(5) = 1$: infatti 5 è autovalore, quindi esiste un autovettore non nullo, quindi $Aut(5) \neq \{0\}$, quindi $\dim Aut(5) \geq 1$
d'altro canto $\dim Aut(5) = m_g(5) \leq m_a(5) = 1$;
rimane da verificare che $m_g(-1) = 2 \Leftrightarrow \dim Aut(-1) = 2$
per calcolare $Aut(-1)$, consideriamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - (-1)\mathbb{1}_3 = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) + \mathbb{1}_3$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vale che $Aut(-1) = \ker(f + id)$

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

pertanto $\dim Aut(-1) = 2$, quindi per il teorema precedente f è diagonalizzabile. (e una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$ è data dall'unione di una base $Aut(-1)$ e di una base di $Aut(5)$)

Geometria affine

La geometria affine tratta di spazi di punti e usa gli spazi vettoriali come spazi di dimensioni. Definiremo degli oggetti chiamati sottospazi affini (rette, piani, ...) e studieremo due modi per rappresentarli: le equazioni cartesiane e le equazioni parametriche.

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K; un insieme A si dice spazio affine su V se esiste una funzione

$$\sigma: A \times A \to V$$

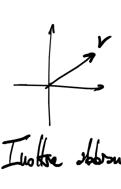
(e denotiamo, per ogni $P, Q \in A$, $\sigma(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$)
che soddisfi le seguenti proprietà:

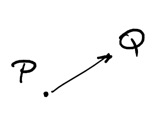
SA1. $\forall P \in A$ e $\forall v \in V$ esiste un unico $Q \in A$ tale che
$$v = \overrightarrow{PQ}$$

SA2. $\forall P, Q, R \in A$ (non necessariamente distinti) vale che
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

gli elementi di A si dicono punti.

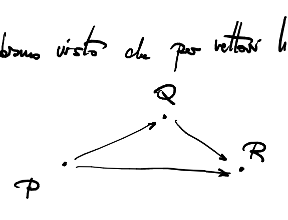
Questa definizione generalizza (e formalizza) le proprietà dei vettori liberi che abbiamo definito all'inizio del corso. Infatti, abbiamo visto che i vettori liberi formano uno spazio vettoriale e che per ogni punto P e per ogni vettore libero v esiste un vettore applicato con punto iniziale P e classe di equipollenza v, ovvero:





il punto Q è l'unico punto tale che $[\overrightarrow{PQ}] = v$

Inoltre abbiamo visto che per vettori liberi/applicati



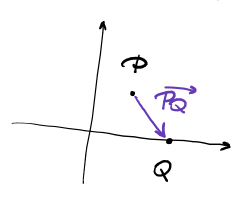
Esempio: possiamo prendere $A = K^n$ (ad esempio $\mathbb{R}^n$) e scegliere $V = K^n$ (attenzione! qui K^n sta giocando due ruoli, quello di spazio affine e quello di spazio vettoriale); quando pensiamo a K^n come a uno spazio affine, scriviamo i suoi elementi, ovvero i suoi punti, come matrici $1 \times n$ (matrici riga), mentre quando pensiamo a K^n come a uno spazio vettoriale scriviamo i suoi elementi, ovvero i suoi vettori, come matrici $n \times 1$ (matrici colonna); la funzione σ che rende K^n uno spazio affine è la seguente

$$\begin{array}{rccc} & A \times A & \longrightarrow & V \\ \sigma: & K^n \times K^n & \longrightarrow & K^n \\ & P, Q & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \\ & (p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \end{array}$$

si verifica che tale funzione σ verifica SA1 ed SA2;
quando pensiamo a K^n come spazio affine lo denotiamo A_K^n
ad esempio, se $n = 2$, e consideriamo

$$P = (1,1) \qquad Q = (2,0)$$

allora $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Lemma: sia A uno spazio affine su V, allora vale che

1. $\forall P \in A \quad \overrightarrow{PP} = 0$ (vettore nullo in V)
2. $\forall P, Q \in A \quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Dim.: le due proprietà seguono da SA1 ed SA2.

1. mostro che per ogni $v \in V$, vale che $v + \overrightarrow{PP} = v$
per SA1 esiste $Q \in A$ tale che $v = \overrightarrow{PQ}$, allora
$$v + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + v = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{PQ} = v$$
2. mostro che $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = 0$ (vettore nullo)
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{PP} = 0$$

Def.: sia A uno spazio affine su V, dove quest'ultimo sia uno spazio vettoriale di dimensione finita; definiamo la dimensione di A come la dimensione di V, ovvero $\dim A = \dim V$;

- se $\dim A = 0$, parliamo di un punto affine
- se $\dim A = 1$, parliamo di una retta affine
- se $\dim A = 2$, parliamo di un piano affine
- se $\dim A = 3$, parliamo di uno spazio affine

Def.: sia A uno spazio affine su V con V di dimensione finita; un riferimento affine su A è una coppia $(O, \mathcal{B})$ dove $O \in A$ e $\mathcal{B}$ è una base di V; il punto O si dice origine del riferimento affine; dato un riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ su A e dato $P \in A$, le coordinate di P rispetto al riferimento $(O, \mathcal{B})$ sono la n-upla $(p_1, \ldots, p_n)$ (dove $n = \dim V$) data dalle coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$

Esempio: se consideriamo $A = A_K^n$ e il riferimento affine $(O, \mathcal{E})$ dove $O = (0, \ldots, 0)$ (il punto con tutte le entrate nulle) ed $\mathcal{E}$ è la base standard di K^n, allora se $P \in A_K^n$, e $P = (p_1, \ldots, p_n)$, allora le sue coordinate rispetto a $(O, \mathcal{E})$ sono $p_1, \ldots, p_n$, perché

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ \vdots \\ p_n - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + p_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

il riferimento $(O, \mathcal{E})$ è detto il riferimento standard e le coordinate rispetto a esso sono dette coordinate standard.

Esempio: se $P \in A_{\mathbb{R}}^3$, $P = (3,1,2)$, allora le coordinate di P rispetto al riferimento standard sono $(3,1,2)$; se invece consideriamo il riferimento $(O', \mathcal{B}')$ dove

$$O' = (1,0,0) \qquad e \qquad \mathcal{B}' = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

allora per calcolare le coordinate di P consideriamo:

$$\overrightarrow{O'P} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo le coordinate di quest'ultimo rispetto alla base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi le coordinate di P rispetto a $(O', \mathcal{B}')$ sono $(1, 1, -2)$

Def.: sia A uno spazio affine su V e consideriamo:

- $Q \in A$
- $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale

definiamo il sottospazio affine passante per Q e parallelo a W come l'insieme:

$$\{P \in A : \overrightarrow{QP} \in W\} \subseteq A$$

se denotiamo con S tale sottospazio affine, allora diciamo che W è la giacitura di S.

Esempio: consideriamo $A = A_{\mathbb{R}}^2$ e $V = \mathbb{R}^2$ e prendiamo

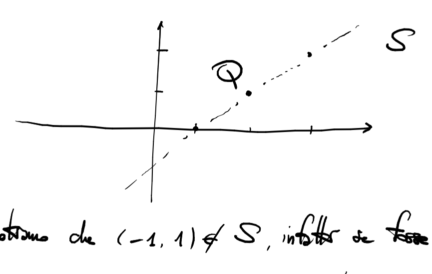
$$Q = (2,1) \qquad e \qquad W = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

il sottospazio affine passante per Q e parallelo a W è

$$S = \{P \in A_{\mathbb{R}}^2 : \overrightarrow{QP} \in W\}$$
$$= \left\{(x_1, x_2) \in A_{\mathbb{R}}^2 : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right\}$$
$$= \left\{(x_1, x_2) \in A_{\mathbb{R}}^2 : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per un certo } t \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= (x_1, x_2) \in A_{\mathbb{R}}^2 : \underbrace{\begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + t \end{cases}}_{\substack{\text{questa è la descrizione di } S \\ \text{tramite equazioni parametriche}}} \text{ per un certo } t \in \mathbb{R}\Big\}$$

la formulazione parametrica di S permette di ottenere facilmente dei punti di S.

- per $t = 0$, otteniamo $(2,1) \in S$
- per $t = 1$, otteniamo $(3,2) \in S$
- per $t = -2$, otteniamo $(0,-1) \in S$



notiamo che $(-1,1) \notin S$, infatti se ~~fosse~~ $(-1,1) \in S$, avremmo

$$\begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} \in span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quest'affermazione è falsa!}$$