## 1

Di una funzione $F(t)$ sappiamo che la trasformata di Fourier è

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|^3}} \ .$$

Deduci dalle proprietà di $\hat{F}(\omega)$ che $F(t) \in L^2(\mathbb{R})$ e che è una funzione continua e limitata. Nota che non si può escludere che $F(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Usa $\hat{F}(\omega)$ per calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |F(t)|^2 \ .$$

Assumendo che $F(t) \in L^1(\mathbb{R})$, usa $\hat{F}(\omega)$ per calcolare anche

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, F(t) \ .$$

## 2

Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{\theta(|t|-1)}{t} \ ,$$

dove $\theta$ è la funzione theta di Heaviside.

- Si deduca dalle proprietà della funzione $f(t)$ che la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ è una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ che non è in $L^1(\mathbb{R})$, senza calcolare $\hat{f}$.
- Si mostri che

  $$\hat{f}(\omega) = \pi i \,\mathrm{sign}(\omega) - 2i\,\mathrm{Si}(\omega) \ ,$$

  dove $\mathrm{Si}(x)$ indica la funzione speciale *seno integrale* definita da

  $$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x dy\, \frac{\sin y}{y} \ ,$$

  e $\mathrm{sign}(\omega)$ è il segno di $\omega$.
- Si calcoli l'integrale

  $$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, (\pi\,\mathrm{sign}(\omega) - 2\,\mathrm{Si}(\omega))^2 \ .$$