

# Tutorato di Analisi 1

## Foglio di esercizi 5

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{\log_5 x^2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} x \tan \left( ax + \arctan \frac{b}{x} \right) \quad a, b \in \mathbf{R}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{e^x}{\sin \left( \frac{1}{x^2} \right)}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4}{4x + 1} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctan x^3 \right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tanh x) - 1}{\ln(x^2 + 1)}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + e}{(\ln(e^x + 1))^3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(\cos(3x)))}{e^{7x^2} - 1}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 9) \cdot (4 \arctan x + 2\pi)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1 - x}}{\sin x} \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x \sin \left( e^{-x} \sin \frac{2}{x} \right)$$

2. Sia  $f$  una funzione polinomiale,  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Dimostrare che esiste un numero reale  $y$  tale che  $|f(y)| \leq |f(x)|$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .
3. Supponiamo che  $f$  sia una funzione continua,  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , tale che  $f(x) > 0$  per ogni  $x$ , e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Dimostrare che esiste  $y \in \mathbf{R}$  tale che  $f(y) \geq f(x)$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ .
4. (a) Per quali valori di  $\alpha$  la funzione  $f(x) = x^\alpha$  è uniformemente continua su  $[0, \infty)$ :  $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3$ ?  
(b) Trovare una funzione  $f$  che è continua e limitata in  $(0, 1]$ , ma non è uniformemente continua in  $(0, 1]$ .  
(c) Trovare una funzione  $f$  che è continua e limitata in  $[0, \infty)$ , ma non è uniformemente continua in  $[0, \infty)$ .