Cambi di base

PROP.:

COMPOSIZIONE — PRODOTTO RIGA PER COLONNA

i). $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)$ $\quad \forall V_1 \xrightarrow{\forall g} \forall V_2 \xrightarrow{\forall f} \forall V_3$, $\forall \mathcal{D}$, $\forall \mathcal{B}$, $\forall \mathcal{C}$

ii). f ISO $\Leftrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ INVERTIBILE, $\quad \forall f \in End(V)$ $\forall \mathcal{B}$ base di V

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$ $\quad \forall f \in Aut(V)$ $\forall \mathcal{B}$ base di V

iii). $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(Id_V)$ INVERTIBILE,

$\left(M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(Id_V)\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(Id_V)$

$\Big\}$ $\forall \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi di V

iv). $M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}_2}(f) = M^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{C}_2}(Id_W) \cdot M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{C}_1}(f) \cdot M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(Id_V)$ $\quad \forall \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi di V, $\forall \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ basi di W

$M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}(f) = \left(M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(Id_V)\right)^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(f) \cdot M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(Id_V)$ $\forall \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi di V

Def: $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(Id_V) \in M_{\dim(V)}(K)$ è detta **MATRICE del CAMBIO di BASE da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$** ($\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi di V)

Dim.: i). vedi Sernesi

ii). f iso $\Leftrightarrow \exists f^{-1}$ applicazione lineare tale che $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = Id_V$

$$\Rightarrow M^B_B(f\circ f^{-1}) = M^B_B(Id_V) = M^B_B(f^{-1}\circ f)$$

$$\overset{\text{i).}}{=} M^B_B(f)\cdot M^B_B(f^{-1}) \qquad = I_{dim(V)} \qquad \overset{\text{i).}}{=} M^B_B(f)\cdot M^B_B(f^{-1})$$

APPLICO $M^B_B(\bullet)$

MATRICE IDENTITÀ

iii). $I_{dim(V)} \overset{\text{VISTO PAG 7}}{=} M^{B_1}_{B_1}(Id_V) \overset{Id = Id\circ Id}{=} M^{B_1}_{B_1}(Id_V\circ Id_V) \overset{\text{i).}}{=} M^{B_1}_{B_2}(Id_V)\cdot M^{B_2}_{B_1}(Id_V)$

e poi scambiamo i ruoli di B_1 e di B_2.

iv). Per la prima uguaglianza: (la seconda segue dalla prima usando ii).)

$$M^{C_1}_{C_2}(Id_W)\cdot \underbrace{M^{B_1}_{C_1}(f)\cdot M^{B_2}_{B_1}(Id_V)}_{\text{PER i). UGUALE A } M^{B_2}_{C_1}(\underbrace{f\circ Id_V}_{=f})} = M^{C_1}_{C_2}(Id_W)\cdot M^{B_2}_{C_1}(f) \overset{\text{i)}}{=} M^{B_2}_{C_2}(Id_W\circ f) = M^{B_2}_{C_2}(f) \quad \square$$

Esempi:

Esempio 1: $B_1 = \mathcal{E}_V = \{e_1, e_2\}$ CANONICO
$B_2 = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Big\}$ 2 BASI DI $V = \mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow M^{B_2}_{B_1}(Id_V) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{B_1}_{B_2}(Id_V) = \left(M^{B_2}_{B_1}(Id_V)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Quindi se $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ coordinate rispetto alla canonica B_1, rispetto alla base B_2 ha coordinate: $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-3b \\ -a-2b \end{pmatrix}$

Esempio 2: $V = M_2(\mathbb{C})$.

$$B_1 = \mathcal{E}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ CANONICA}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ NON CANONICA}$$

Interpretiamo $M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\in M_2(\mathbb{C})} \longleftrightarrow (a\ b\ c\ d) \in \mathbb{C}^4$

$$\Rightarrow M^{B_2}_{B_1}(Id_{\mathbb{C}^4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{B_1}_{B_2}(Id_{\mathbb{C}^4}) = \left(M^{B_2}_{B_1}(Id_{\mathbb{C}^4})\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Perciò una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nella base canonica si esprime nella base B_2 come:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d \\ b+c \\ ib-ic \\ a-d \end{pmatrix}$$

Esempio 3: [TIPICO ESERCIZIO ESAME]

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + 2x_4 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^4}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \text{GAUß}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome $\text{rank}\left(M^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^4}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}(f)\right) = 3$

allora per il **Teorema della Dimensione per applicaz. lineari**:

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{=4} = \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{=\text{rank}(\ldots)=3} + \dim(\ker(f)),$$

quindi otteniamo: $\dim(\ker(f)) = 1$

Per determinare esplicitamente il nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo:

$$\ker(f) = S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MEMO: SIAMO AUTORIZZATI AD UTILIZZARE LA FORMA SCALA PERCHÉ LE OPERAZIONI ELEMENTARI PRESERVANO **SOLUZIONI** DI SISTEMI LINEARI E QUINDI IL **KER(f)** È **INVARIANTE** PER ALGORITMO GAUß

Consideriamo le seguenti basi:

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^4 \qquad \mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

e calcoliamo $M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{34} \end{pmatrix}$

STEP I: Esprimiamo $f(\text{VETTORI di } \mathcal{B}) =$ COMBINAZ. LINEARE dei VETTORI di $\mathcal{G}$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = a_{14}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + a_{24}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_{34}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

STEP II: Ognuna delle quattro combinazioni lineari dà origine ad un sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ALL'INDIETRO}]{\text{GAUß + SOSTITUZ.}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ALL'INDIETRO}]{\text{GAUß + SOSTITUZ.}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ALL'INDIETRO}]{\text{GAUß + SOSTITUZ.}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ALL'INDIETRO}]{\text{GAUß + SOSTITUZ.}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

STEP III: Allora la matrice $M^B_C(f)$ è quella matrice che ha come colonne le soluzioni dei sistemi lineari appena risolti:

$$\rightsquigarrow M^B_C(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare l'applicazione lineare scritta nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{G}$ diventa:

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \end{pmatrix}$$

In alternativa potevamo determinare $M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}(f)$ usando:

$$M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}_3}(Id_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(f) \cdot M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^4}) = M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}(f)$$

GIÀ CALC. PRIMA

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OTTENUTA COME

$$\left(M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{G}}(Id_{\mathbb{R}^3})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

TRAMITE GAUSS PER L'INVERSA O METODO DEL COFATTORE