Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 10 - Derivate e studi di funzione - 26/11/2024

Es. 1

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

ii) $f(x) = \log\left(x^2 - \sin^2 x\right)$

iii) $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

iv) $f(x) = x^{-\arccos x}$

Es. 2 (14/06/2022)

Finire lo studio di funzione iniziato nel Tutorato 09 determinando:

$$f(x) = \log\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$$

i) derivata prima e suo segno, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali punti di massimo e minimo locali e globali.

ii) derivata seconda e suo segno, intervalli di convessità e concavità, eventuali punti di flesso

iii) grafico di f.

iv) dire, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante soluzioni ha l'equazione $\log\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) = \alpha$.

Es. 3 (20/06/2018)

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{|x^2 - 4|}{x+4}}$

SVOLGIMENTO

Es. 1

i) $f(x) = \sqrt{1+x^2} = (g \circ h)(x)$ con $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 1 + x^2$

Dalle regole di derivazione abbiamo:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(1+x^2) = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(x^2) = 0 + 2x^{2-1} = 2x$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(g \circ h)(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[g(h(x))\right] = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{h(x)}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ii) $f(x) = \log(x^2 - \operatorname{sen}^2 x) = (g \circ h)(x)$ con $g(x) = \log x$ e $h(x) = x^2 - \operatorname{sen}^2 x$

A sua volta scriviamo

$h(x) = x^2 - \operatorname{sen}^2 x = t(x) - t(m(x))$ con $t(x) = x^2$ e $m(x) = \operatorname{sen} x$

Calcoliamo quindi:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$t'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$m'(x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(t(x) - t(m(x))\right) = \frac{d}{dx}(t(x)) - \frac{d}{dx}\left[t(m(x))\right] = 2x - t'(m(x)) \cdot m'(x)$$

$$= 2x - 2 \cdot m(x) \cdot m'(x) = 2x - 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = \frac{2x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$$

N.B. $\hookrightarrow$ è utile ricordare (servirà anche per gli integrali) che $\dfrac{d}{dx}\left[\log(f(x))\right] = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

iii) $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Ricordando che $\dfrac{d}{dx}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{\left[\frac{d}{dx}(1-x)\right]\cdot(1+x)-(1-x)\cdot\left[\frac{d}{dx}(1+x)\right]}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+\cancel{x}+1-\cancel{x}}{1+x}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{-\cancel{2}}{(1+x)^2} = -\frac{\cancel{1+x}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\cancel{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

iv) $f(x) = x^{-\arccos x} = e^{-\arccos x\cdot\log x}$ $\longleftarrow$ come nei limiti scriviamo

$h(x)^{g(x)} = e^{\log(h(x))^{g(x)}}$
$= e^{g(x)\log(h(x))}$

$$f'(x) = e^{-\arccos x\cdot\log x}\cdot\left[-\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\log x + \frac{\arccos x}{x}\right)\right]$$

$$= x^{-\arccos x}\cdot\left[\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arccos x}{x}\right]$$

Es. 2

$$f(x) = \log\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$$

$e^{2x} - e^{x} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$

Avevamo già trovato che $\text{dom} f = \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ se $x > 0$, $f(x) < 0$ se $x < 0$, $f(0) = 0$, $y = 0$ as. orizz. sinistro, $y = 2x$ as. obliquo destro ($\Rightarrow$ no max. globale)

i) $$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1} \longrightarrow \text{ben definita } \forall x \in \mathbb{R} \text{ da } (*)$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1} \geq 0 \underset{(*)}{\iff} 2e^{2x} - e^{x} \geq 0$$

Pongo $t = e^{x}$

$\rightarrow 2t^2 - t \geq 0 \iff t(2t - 1) \geq 0 \iff t \leq 0$ o $t \geq \frac{1}{2}$

$e^{x} \leq 0$ o $e^{x} \geq \frac{1}{2}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\nexists x \qquad x \geq \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$

Dunque $f'(x) \geq 0$ se $x \geq -\log 2$, $f'(x) = 0$ se $x = -\log 2$, $f'(x) < 0$ se $x < -\log 2$

$\Rightarrow$ f crescente se $x \geq -\log 2$ e decrescente se $x < -\log 2$, dunque f ha un minimo locale in $x = -\log 2$ e vale $f(-\log 2) = \log\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \log\left(\frac{1 - 2 + 4}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow$ dall'andamento di f e dai suoi limiti deduciamo che il minimo è globale!

ii) $$f''(x) = \frac{(4e^{2x} - e^{x})(e^{2x} - e^{x} + 1) - (2e^{2x} - e^{x})^2}{(e^{2x} - e^{x} + 1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{4e^{4x}} - \cancel{4e^{3x}} + 4e^{2x} - e^{3x} + \cancel{e^{2x}} - e^{x} - \cancel{4e^{4x}} - \cancel{e^{2x}} + \cancel{4e^{3x}}}{(e^{2x} - e^{x} + 1)^2} = \frac{-e^{3x} + 4e^{2x} - e^{x}}{(e^{2x} - e^{x} + 1)^2}$$

$$= \frac{-e^{x}(e^{2x} - 4e^{x} + 1)}{(e^{2x} - e^{x} + 1)^2} \longrightarrow \text{ben definita } \forall x \in \mathbb{R} \text{ da } (*)$$

$f''(x) \geq 0 \iff -e^x(e^{2x} - 4e^x + 1) \geq 0 \iff e^{2x} - 4e^x + 1 \leqslant 0$

Pongo $t = e^x \to t^2 - 4t + 1 \leqslant 0$

$t = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow 2 - \sqrt{3} \leqslant t \leqslant 2 + \sqrt{3}$

$2 - \sqrt{3} \leqslant e^x \leqslant 2 + \sqrt{3}$

$(2 - \sqrt{3} > 0)$

$\Rightarrow \log(2-\sqrt{3}) \leqslant x \leqslant \log(2+\sqrt{3})$

Dunque $f''(x) > 0$ se $\log(2-\sqrt{3}) < x < \log(2+\sqrt{3})$, $f''(x) = 0$ se $x = \log(2 \pm \sqrt{3})$

$f''(x) < 0$ se $x < \log(2-\sqrt{3})$ o $x > \log(2+\sqrt{3})$

$\Rightarrow f$ convessa se $\log(2-\sqrt{3}) \leqslant x \leqslant \log(2+\sqrt{3})$, concava se $x \leqslant \log(2-\sqrt{3})$ o $x \geqslant \log(2+\sqrt{3})$

$\Rightarrow f$ ha flessi per $x = \log(2 \pm \sqrt{3})$

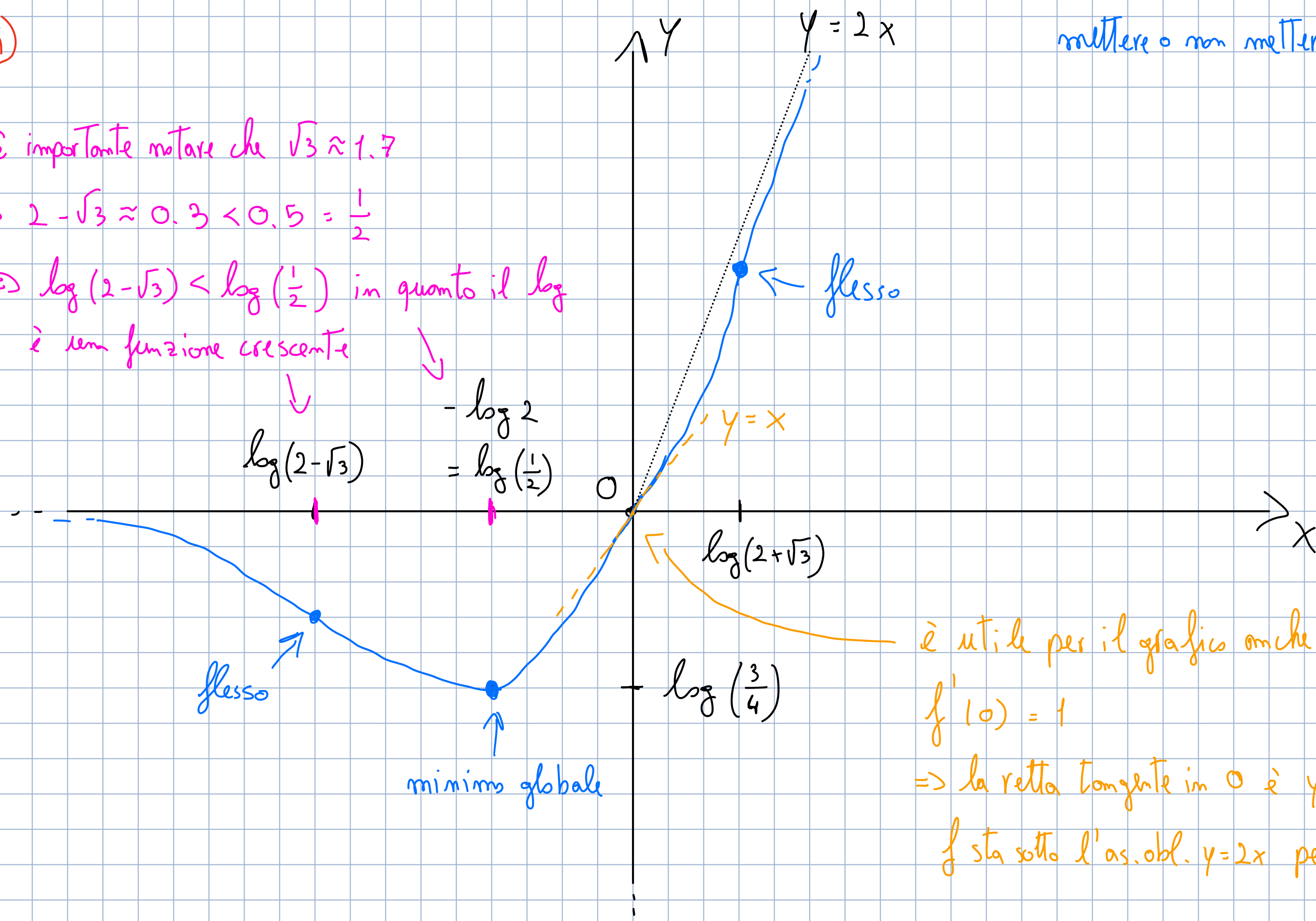
$\Rightarrow$ finché non parliamo di "stretta" concavità/convessità (come anche di "stretta" crescenza/decr.) possiamo mettere o non mettere l'uguale.

iii)

è importante notare che $\sqrt{3} \approx 1.7$

$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} \approx 0.3 < 0.5 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log(2-\sqrt{3}) < \log\left(\frac{1}{2}\right)$ in quanto il log è una funzione crescente



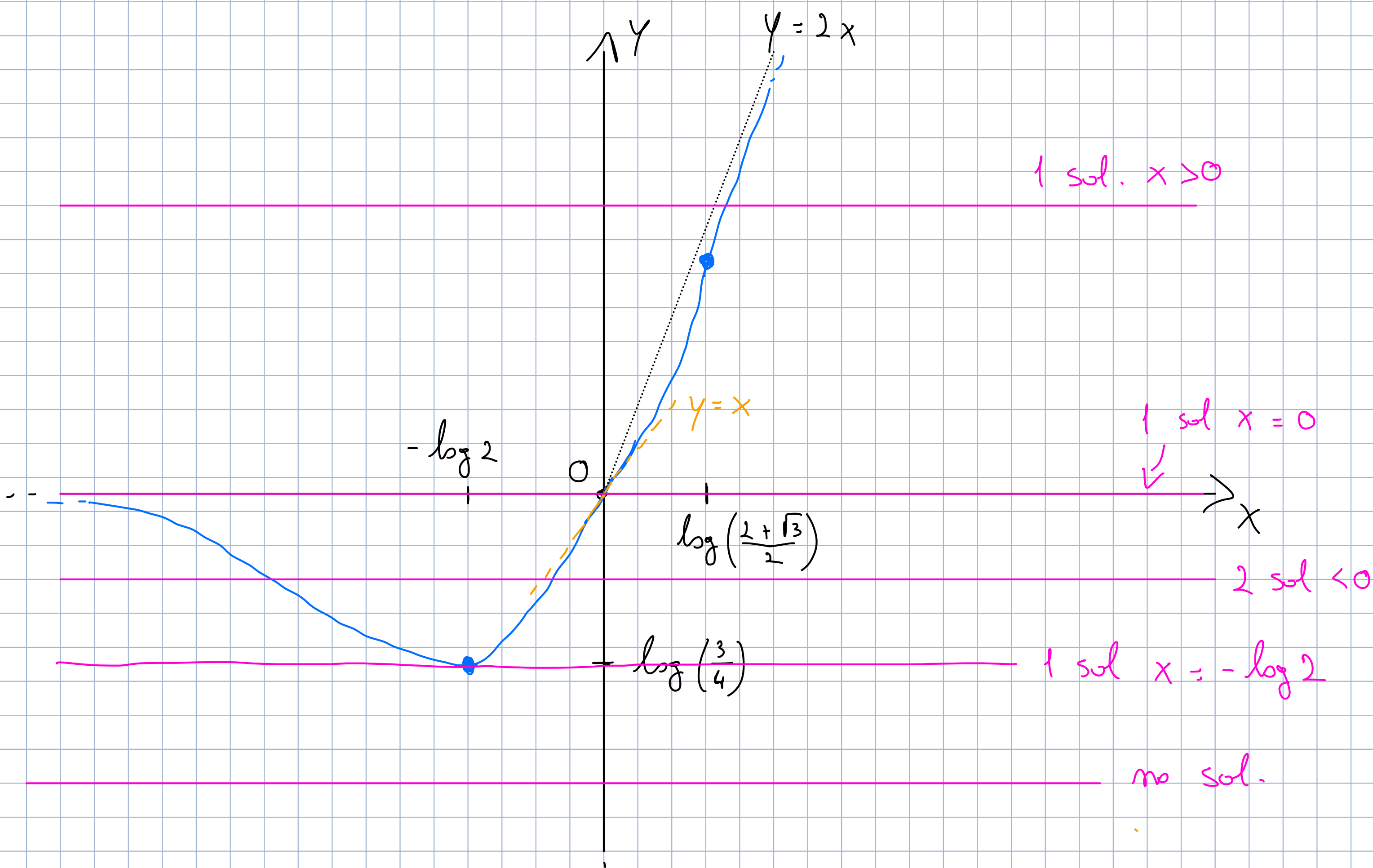
è utile per il grafico anche $f'(0) = 1$

$\Rightarrow$ la retta tangente in 0 è $y = x$, quindi f sta sotto l'as. obl. $y = 2x$ per $x \geq 0$.

iv) Dal grafico e dalle considerazioni fatte finora deduciamo che l'equazione $f(x) = \alpha$

- non ammette soluzioni per $\alpha < \log\left(\frac{3}{4}\right)$
- ha una soluzione $x = -\log 2$ se $\alpha = \log\left(\frac{3}{4}\right)$
- ha 2 soluzioni distinte e negative se $\log\left(\frac{3}{4}\right) < \alpha < 0$
- ha una soluzione $x \geq 0$ se $\alpha \geq 0$

  ↳ e in particolare $f(x) = 0 \iff x = 0$.



Es. 3

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x^2-4|}{x+4}}$$

- **Dominio**

$$\frac{|x^2-4|}{x+4} \geq 0 \iff x+4>0 \iff x>-4 \qquad \left(\text{in quanto } |x^2-4| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\right)$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{dom} f = (-4, +\infty)$ (deduciamo dal dominio che f non può essere né pari né dispari)

Possiamo scrivere spezzando il valore assoluto e tenendo conto del dominio $\rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+4}} & \text{se } -4 < x \leq -2 \text{ o } x \geq 2 \\ \sqrt{\dfrac{4-x^2}{x+4}} & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

- **Segno e inters. assi**

Dove ben definita la radice è sempre ≥ 0 quindi $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f$

e $f(x) = 0 \iff x = \pm 2$.

Inoltre notiamo che $f(0) = 1$

- **Limiti e asintoti**

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = \lim_{x \to -4^+} \sqrt{\frac{x^2-4}{x+4}} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x=-4 \text{ è asintoto verticale}$$

($\Rightarrow$ no max. globale)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x+4}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2(x+4)}} = 0$$

$\Rightarrow$ f non ha asintoti orizzontali o obliqui

• Derivata prima / crescenza / max. e min. locali e globali

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+4}{x^2-4}} \cdot \dfrac{2x(x+4)-(x^2-4)}{(x+4)^2} = \dfrac{2x^2+8x-x^2+4}{2\sqrt{(x^2-4)(x+4)^3}} = \dfrac{x^2+8x+4}{2\sqrt{(x^2-4)(x+4)^3}} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x^2}} \cdot \dfrac{-2x(x+4)-(4-x^2)}{(x+4)^2} = \dfrac{-2x^2-8x-4+x^2}{2\sqrt{(4-x^2)(x+4)^3}} = \dfrac{-x^2-8x-4}{2\sqrt{(4-x^2)(x+4)^3}} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2+8x+4}{2\sqrt{(x^2-4)(x+4)^3}} & \text{se } -4 < x < -2 \text{ o } x > 2 \\[2ex] -\dfrac{x^2+8x+4}{2\sqrt{(4-x^2)(x+4)^3}} & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

↪ f' non è ben definita in $x = -2$ e $x = 2$

$\Rightarrow$ f non è derivabile in $x = \pm 2$

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to -2^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$$

$\rightarrow$ f ha tangente verticale in $x = \pm 2$.

(in particolare ha cuspidi in $x = \pm 2$)

Per studiare il segno di f' ricordiamo che la radice è sempre ≥ 0 quando ben definita, quindi basta studiare il segno del numeratore

$$x^2 + 8x + 4 \geq 0$$

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16-4} = -4 \pm \sqrt{12} = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

notiamo che $x_1 = -4 - 2\sqrt{3} \notin \operatorname{dom} f$ e che $x_2 = -4 + 2\sqrt{3} \in (-2, 0)$

	$x<-4-2\sqrt{3}$	$-4-2\sqrt{3}$ … -4	-4 … -2	-2 … $-4+2\sqrt{3}$	$-4+2\sqrt{3}$ … 2	>2
x^2+8x+4	+	−	−	−	+	+
$f'(x)$	∄	∄	−	+	−	+
$f(x)$	∄	∄	↘	↗	↘	↗

il segno di f' è dato dal segno di x^2+8x+4 se $-4<x<-2$ o $x>2$, e dal segno di $-(x^2+8x+4)$ se $-2<x<2$

$\Rightarrow$ f crescente in $(-2, -4+2\sqrt{3})$ e in $(2, +\infty)$ e decrescente in $(-4, -2)$ e $(-4+2\sqrt{3}, 2)$

$\Rightarrow$ f ha max. locale in $x = -4+2\sqrt{3}$ e min. locale in $x = \pm 2$

↳ $x = \pm 2$ sono minimi locali e globali, anche se f non è derivabile!

• Derivata seconda / concavità / flessi

Per comodità spezziamo gli intervalli. Se $-4 < x < -2$ o $x > 2$:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot \frac{(2x+8)\sqrt{(x^2-4)(x+4)^3} - (x^2+8x+4)\cdot\dfrac{2x(x+4)^3+3(x+4)^2(x^2-4)}{2\sqrt{(x^2-4)(x+4)^3}}}{(x^2-4)(x+4)^3}$$

$$= \frac{2(2x+8)(x^2-4)(x+4)^{\cancel{3}\,1} - (x^2+8x+4)\cancel{(x+4)^2}\left[2x(x+4)+3(x^2-4)\right]}{4(x^2-4)(x+4)^{\cancel{3}}\sqrt{(x^2-4)(x+4)^3}}$$

$$= \frac{2(2x+8)(x^2-4)(x+4) - (x^2+8x+4)(2x^2+8x+3x^2-12)}{4\sqrt{(x^2-4)^3(x+4)^5}}$$

$$= \frac{2(2x+8)(x^2-4)(x+4) - (x^2+8x+4)(5x^2+8x-12)}{4\sqrt{(x^2-4)^3(x+4)^5}}$$

↳ anche sviluppando il numeratore arriviamo a un polinomio di 4 grado i cui zeri possono essere trovati solo con apposite formule risolutive, che non verrebbero richieste ad un esame...

$\Rightarrow$ calcolando la derivata seconda, non possiamo dedurre nulla analiticamente su concavità / flessi.

• Grafico

non siamo certi su concavità e convessità! ←

Ma necessariamente deve esserci almeno un punto di flesso in $(-4,-2)$