

Esercizi di Inferenza Statistica

Blocco III

a.a. 2024 – 2025

1. Dato un campione casuale $(Y_1, \dots, Y_n)$ da una variabile aleatoria $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Si consideri lo stimatore $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i / (n+1)$ per il parametro della Poisson.
 - a. Si valuti la correttezza dello stimatore.
 - b. Si determini l'errore quadratico medio dello stesso.
 - c. Si dica se lo stimatore è consistente in media quadratica.
2. Sia $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ un campione casuale da una $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$. Si consideri come stimatore per σ^2

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - 1)^2$$

- a. T è uno stimatore corretto?
 - b. T è consistente in media quadratica?
3. Considerato un campione $(Y_1, \dots, Y_9)$ estratto da una popolazione esponenziale di parametro λ , si dimostri che
 - a. $\bar{Y} = \sum_{i=1}^9 Y_i / 9$ è uno stimatore corretto di $\theta = 1/\lambda$.
 - b. $\bar{Y}$ è un stimatore consistente.
 - c. $\bar{Y}$ ha varianza minima tra tutti gli stimatori corretti di θ .
 4. Si consideri un campione casuale di ampiezza n da Y avente funzione di densità

$$f(y; \theta) = \frac{\theta}{y^{\theta+1}} e^{\theta}, \quad y > e, \theta > 0$$

- a. Scrivere la funzione di log-verosimiglianza per il parametro θ .
- b. Verificare analiticamente che lo stimatore di massima verosimiglianza di θ risulta essere:

$$\hat{\theta}_{MV} = n \left(\sum_{i=1}^n \log y_i - n \right)^{-1}$$

- c. Supponendo di avere osservato il seguente campione di $n = 9$ elementi

3.60, 5.05, 3.41, 3.29, 5.91, 4.26, 3.68, 4.45, 4.13

determinare la stima di massima verosimiglianza di θ .

5. Si dispone di un campione casuale di tre unità dalla variabile aleatoria $Y \sim \text{Bin}(n = 7, \theta)$: $y_1 = 6, y_2 = 5, y_3 = 4$.
 - a. Qual è la stima di massima verosimiglianza per θ ?
 - b. Noto che il parametro θ assume uno dei valori 0.6, 0.7, 0.8, qual è la stima di massima verosimiglianza?

6. Si considerino le due variabili X e Y distribuite come Normali aventi entrambe di media μ e varianza rispettivamente pari a σ_1^2 e σ_2^2 . Si disponga di un campione casuale semplice di dimensione n_1 da X e di n_2 da Y , e siano $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ le medie campionarie. Si consideri lo stimatore

$$T = (1 - 2a)\bar{X} + 2a\bar{Y}$$

- a. Verificare se lo stimatore T è non distorto per μ .
- b. Si calcoli il valore di a che rende minima la varianza dello stimatore T supponendo che X e Y siano indipendenti.

7. In un piccolo ospedale il numero di pazienti che si presentano ogni giorno al pronto soccorso può essere assunto come una determinazione di una Poisson con parametro λ nei giorni feriali. Sia inoltre noto che nei giorni festivi (festività e/o fine settimana) il numero di pazienti è una Poisson di parametro $3\lambda/2$. Nel 2023 (composto da 250 giorni feriali e 115 giorni festivi) sono state osservate 1000 visite nei giorni feriali e 650 visite nei giorni festivi.
 - a. Si ottenga la stima di massima verosimiglianza di λ .
 - b. Si fornisca una stima della probabilità che in un giorno feriale arrivino al pronto soccorso 2 o meno pazienti.
 - c. Qual è la distribuzione asintotica dello stimatore di massima verosimiglianza ottenuto al punto a.?
8. Sia dato un campione $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ da una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
 - a. Qual è la stima di massima verosimiglianza per σ^2 , nel caso in cui μ sia nota?
 - b. Nel caso μ e σ^2 siano entrambi incogniti, si denoti con $\hat{\sigma}^2$ lo stimatore di massima verosimiglianza per σ^2 . Si confronti tale stimatore con lo stimatore $S^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 / (n - 1)$ in termini di errore quadratico medio.
9. Si vuole stimare la proporzione di unità conformi a elevati standard di qualità per una popolazione di pezzi prodotti presso una fabbrica. A tal fine si decide di estrarre casualmente unità da tale popolazione finché non si osservano 3 unità conformi agli standard di qualità. Si denoti con X il numero di unità estratte. Tale operazione viene compiuta 5 volte ottenendo i seguenti risultati: 25, 22, 18, 16, 21.
 - a. Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza per la proporzione di unità conformi nella popolazione e se ne ottenga la stima utilizzando i dati forniti.
 - b. Qual è la stima di massima verosimiglianza per il numero medio di estrazioni che occorre fare prima di osservare 20 pezzi conformi?
10. Sia Y una v.a. con densità $f(y; \theta) = 2y/\theta^2$, dove $0 < y < \theta$, $\theta > 0$. Si consideri un campione casuale di ampiezza n da Y :
 - a. Determinare $E(\bar{Y}_n)$, dove $\bar{Y}_n$ è la media campionaria.
 - b. Scrivere la funzione di verosimiglianza per il parametro θ .
 - c. Ottenere lo stimatore di massima verosimiglianza per θ .
11. La variabile X è distribuita come una $\mathcal{N}(\mu, 144)$. Si estraggono casualmente 100 valori x_i dalla popolazione ma si registra solo se ciascun valore estratto è superiore a 200. Si definisca la variabile Y tale che $y_i = 1$ se $x_i > 200$. Per il campione dato si ha $\sum_{i=1}^n y_i = 80$.
 - a. Si fornisca lo stimatore di massima verosimiglianza della probabilità $p = P(X > 200)$.
 - b. Si ottenga la stima di massima verosimiglianza di μ .
12. Sia $(x_1, \dots, x_n)$ un campione casuale da $X \sim \text{Esp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$ e avente densità $f_X(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, per $x > 0$. Sia ζ_p il quantile di ordine p della distribuzione di X , cioè $F_X(\zeta_p) = p$.
 - a. Si ottenga ζ_p in funzione di λ e si ricavi lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\zeta}_p$.
 - b. Si ricavi la distribuzione asintotica di $\hat{\zeta}_p$.