

26 Novembre

Def Data $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ed $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$, allora F è una primitiva di f e f si dice primitivabile.

1) $f \in C^0(I) \Rightarrow f$ è primitivabile. Infatti, scelto un qualsiasi $x_0 \in I$ e posto

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad x \in I$$

dol teorema fond. del calcolo risulta

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

2) Se F è una primitiva di f in I allora

$G: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di f se e solo se

$$G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I.$$

Teorema (1° teor fond calcolo)

Sia $f \in C^0([a, b])$ $a < b$ in $\mathbb{R}$. Allora

$$\int_a^b f(x) dx = \cancel{G}(b) - G(a)$$

per una qualsiasi primitiva $G(x)$ di $f(x)$ in $[a, b]$.

Dim Scegliamo una specifica primitiva

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

$$F(a) = 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - \overset{0}{F(a)}$$

Sappiamo dal 2° teor fond calcolo che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Sia ora $G(x)$ una generica primitiva. Sappiamo che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$G(x) = F(x) + c$$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + \cancel{c}) - (F(a) + \cancel{c}) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Trouve primitive

$f(x)$

$\int f(x) dx$

$$x^a \quad a \neq -1$$

$$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$\int_1^2 x^a dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_1^2 = \frac{2^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

d'où $F(x) \Big|_1^2 = F(2) - F(1)$

$$x^{-1}$$

$$\ln|x| + C$$

$$\cos x$$

$$\sin x + C$$

$$\sin x$$

$$-\cos x + C$$

$$\operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{sh}(x) + C$$

$$\operatorname{sh}(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) + C$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x + C$$

$$e^x$$

$$e^x + C$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n^3} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

puo' essere interpretato come una somma di Riemann

per la funzione x^2 in $[0, 1]$
"f(x)"



$$|\Delta_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Teorema (integrazione per parti) Sia $f, g \in C^1([a, b])$. Allora vale

$$\textcircled{1} \quad \int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$\textcircled{2} \quad \int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Dim Si parte dalla regola del prodotto per la derivata

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$f'(x) g(x) = (f(x) g(x))' - f(x) g'(x)$$

$$\int f'(x) g(x) dx = \int (f(x) g(x))' dx - \int f(x) g'(x) dx$$

$$\boxed{\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx} \quad \textcircled{1}$$

Dimostriamo ora la (2)

$$\textcircled{2} \quad \int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx \stackrel{\text{1° teo. del calcolo}}{=} \int_a^b f'(x) g(x) dx \Big|_a^b \stackrel{\text{formula (1)}}{=}$$

$$= (f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx) \Big|_a^b \stackrel{\text{risultato 1}}{=}$$

$$= f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

$$(\lambda F(x) + \mu G(x)) \Big|_a^b = \lambda F(x) \Big|_a^b + \mu G(x) \Big|_a^b$$

$$\stackrel{\text{1° teo. del calcolo}}{=} \boxed{f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx}$$

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$\int_1 \lg(x) dx = \int (x)' \lg(x) dx = x \lg x - \int x (\lg x)' dx$$

$$= x \lg x - \int \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} dx = \cancel{x} \lg x - \int dx =$$

$$= x \lg x - x + C$$

$$\int x^{-2} \lg(x) dx = \int \left(\frac{x^{-3}}{-3} \right)' \lg x dx =$$

$$= -\frac{x^{-3}}{3} \lg x + \frac{1}{3} \int x^{-3} \underbrace{(\lg x)'}_{x^{-1}} dx$$

$$= -\frac{x^{-3}}{3} \lg x + \frac{1}{3} \int x^{-4} dx$$

$$= -\frac{x^{-3}}{3} \lg x + \frac{1}{3} \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$\int 1 \arctan x \, dx = \int (x)' \arctan x \, dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

dove $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \ln'(1+x^2) \cdot (1+x^2)'$
 $= \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$

$$\int x \arctan x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{\cancel{x^2+1}^1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$\int x^2 e^x dx \quad \int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx =$$

$$= x e^x - \int (x)' e^x dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 (x e^x - e^x + C) =$$

$$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x - 2 C$$

$$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C$$

$$\int x^2 2^x dx = \int x^2 e^{\lg 2^x} dx = \int x^2 e^{x \lg 2} dx$$

$$= \int x^2 \left(\frac{e^{x \lg 2}}{\lg 2} \right)' dx = \frac{1}{\lg 2} x^2 2^x$$

$$- \frac{2}{\lg 2} \int x e^{x \lg 2} dx$$

$$= \frac{1}{\lg 2} x^2 2^x - \frac{2}{\lg 2} \left[\int x \left(\frac{e^{x \lg 2}}{\lg 2} \right)' dx \right]$$

$$= \frac{1}{\lg 2} x^2 2^x - \frac{1}{\lg 2} \left[\frac{x 2^x}{\lg 2} - \frac{1}{\lg 2} \int e^{x \lg 2} dx \right]$$

$$= \frac{x^2 2^x}{\lg 2} - \frac{x 2^x}{\lg^2 2} + \frac{1}{\lg^3 2} 2^x + C$$

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$\int x \sin x dx = \int x (-\cos x)' dx =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int e^x \cos x dx = \int (e^x)' \cos x dx =$$

$$= e^x \cos(x) - \int e^x (-\sin x) dx$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$$