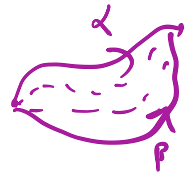
PI e spazi con $\pi^1(Q) \neq 0$

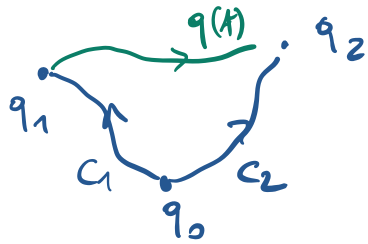
$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \underbrace{\int \mathcal{D}q}_{\{\text{tutti i cammini che uniscono } q_1 \text{ con } q_2\}} \; e^{iS/\hbar}$$



$\alpha \simeq \beta$

Appartengono a classi di omotopia; l'insieme dei cammini da q_1 a q_2 modulo omotopie è in relazione 1 a 1 con $\pi^1(Q)$, anche se non ha struttura di gruppo.

L'isomorfismo funziona nel seguente modo. Fissiamo un $q_0 \in Q$:



cammino, loop

$$\underset{\in \Lambda^1_{12}(Q)}{[q]} \longleftrightarrow \underset{\in \pi^1(Q)}{[c_2^{-1} \cdot q \cdot c_1]}$$

Nota: le classi di omotopia sono insiemi disgiunti di cammini.

Definiamo
$$K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int \mathcal{D}q_\alpha \; e^{iS/\hbar}$$

{Cammini da q_1 a q_2 nella classe di omotopia corrispondente a $\alpha \in \pi^1(Q)$}

Possiamo quindi scrivere l'ampiezza come comb. lineare delle K_α

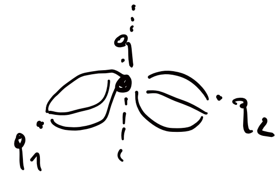
$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \sum_{\alpha \in \pi^1(Q)} \chi(\alpha) \cdot K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$\chi(\alpha)$ scelte in modo che K soddisfi le seguenti probabilità:

1) K non dipende dalla scelta di c_1 e c_2

2) K sia un'ampiezza di probabilità, cioè:

$$K(q_2,q_1;t_2,t_1) = \int_{t_1<t<t_2} dq\, K(q_2,q;t_2,t)\, K(q,q_1;t,t_1)$$

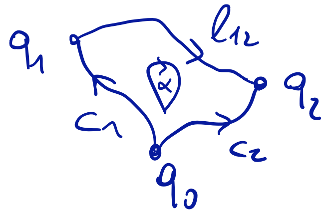


Qto avviene se i pesi soddisfano (*)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ \chi(\beta\circ\alpha) = \chi(\beta)\,\chi(\alpha) \\ \\ \bullet\ \ \chi(\alpha) \text{ fornisce una RAPPRESENTAZIONE 1dim. UNITARIA} \\ \quad \text{del gruppo fondamentale} \\ \qquad \chi : \pi^1(Q) \longrightarrow \{e^{i\varphi}\} \end{array}\right\} (*)$$

cioè $|\chi(\alpha)| = 1 \quad \forall \alpha \in \pi^1(Q)$ ← "CARATTERI" di $\pi^1(Q)$

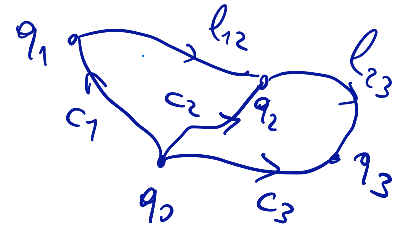
→ Se $\pi^1(Q) \neq 0$ (cioè è un gruppo non-triviale), abbiamo un'ambiguità nell'associare alla teoria classica una teoria quantistica. Qta ambiguità è data dalla scelta del carattere χ.

(*) 

$$l_{12} = c_2 \circ \alpha \circ c_1^{-1}$$

2)

- Prendiamo α, β, γ tre loops con base pt. q_0 e t.c. $\beta \circ \alpha = \gamma$



- Siano q_1, q_2, q_3 pti di Q allora, scelto un c_3 fisso, ho che $c_3 \circ \gamma \circ c_1^{-1}$ è un cammino da q_1 a q_3.

- Ogni cammino da q_1 a q_3 può essere splittato (mod omotopie) in un cammino da q_1 a q_2 e uno da q_2 a q_3:

$$\underbrace{c_3 \circ \gamma \circ c_1^{-1}}_{q_1 \to q_3} = \underbrace{c_3 \circ \beta \circ c_2^{-1}}_{q_2 \to q_3} \circ \underbrace{c_2 \circ \alpha \circ c_1^{-1}}_{q_1 \to q_2}$$

- Un'ampiezza di probabilità deve soddisfare:

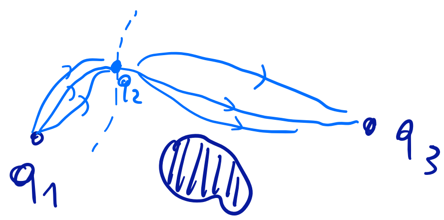
$$K(q_3, q_1; t_3, t_1) = \int dq_2 \, K(q_3, q_2; t_3, t_2) \, K(q_2, q_1; t_2, t_1) \qquad (\ddagger)$$

con $t_1 < t_2 < t_3$

Affinché la formula sopra funzioni, bisogna che

$$\sum_{\gamma} \chi(\gamma) K_\gamma(3,1) = \int dq_2 \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha) \chi(\beta) K_\beta(3,2) K_\alpha(2,1) \qquad (*)$$

ma $$K_\gamma(3,1) = \int_{\{\text{cammini da } q_1 \text{ a } q_3 \text{ in classe } \gamma\}} \mathcal{D}q\, e^{iS} = \sum_\alpha \int dq_2 \int_{\{q_1\to q_2 \text{ in } \alpha\}} \mathcal{D}q\, e^{iS} \int_{\{q_2\to q_3 \text{ in } \gamma\circ\alpha^{-1}\}} \mathcal{D}q\, e^{iS}$$



$$= \sum_\alpha \int dq_2\; \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\; \chi(\gamma^{-1}\circ\alpha)\, K_{\gamma\circ\alpha^{-1}}(3,2)$$

$$K = \sum_{\gamma,\alpha} \int dq_2\; \chi(\alpha)\, \chi(\gamma^{-1}\circ\alpha)\; K_\alpha(2,1)\, K_{\gamma^{-1}\circ\alpha}(3,2)$$

$\beta \equiv \gamma\circ\alpha^{-1}$
$\Rightarrow \gamma = \beta\circ\alpha$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \int dq_2\; \chi(\alpha)\,\chi(\beta)\; K_\alpha(2,1)\, K_\beta(3,2)$$

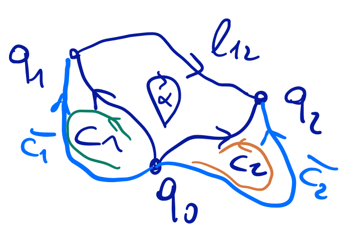
Qto è compatibile con (*) se

$$\boxed{\chi(\beta\circ\alpha) = \chi(\beta)\,\chi(\alpha)}$$

1) La definizione di $K(2,1) = \sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)$

NON deve dip dalla scelta dei cammini c_1, c_2

↳ Prendiamo diversi cammini $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$



Allora si ha:

$$\bar{c}_2\circ\alpha\circ\bar{c}_1^{-1} = c_2\circ \underbrace{c_2^{-1}\circ\bar{c}_2}_{\mu}\circ\alpha\circ\underbrace{\bar{c}_1^{-1}\circ c_1}_{\lambda}\circ c_1^{-1}$$

loops con base pt. q_0

calcolata con $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ calcolata con c_1, c_2

$$|\bar{K}(2,1)| \overset{!}{=} |K(2,1)|$$

$$\Rightarrow \left|\sum_\alpha \bar{\chi}(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right| \overset{!}{=} \left|\sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right|$$

$$\parallel$$

$$\left|\sum_\alpha \chi(\mu\cdot\alpha\cdot\lambda)\, K_\alpha(2,1)\right| = \left|\sum_\alpha \chi(\mu)\chi(\lambda)\,\chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right|$$

$$= |\chi(\mu)\chi(\lambda)|\left|\sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right|$$

$$\Rightarrow |\chi(\mu\circ\lambda)| = 1 \qquad \forall\, \mu, \lambda \in \pi^1(Q)$$

Particelle identiche

- Prendiamo un sistema di 2 particelle IDENTICHE in $\mathbb{R}^d$.
- Lo sp. delle config è

$$Q = \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{\bar{x}_1 = \bar{x}_2\} \right) / \mathbb{Z}_2$$

parametrizzato da $\{ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \mid \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \} / \sim$

dove $\sim$ è $\quad (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \sim (\bar{x}_2, \bar{x}_1)$

- Loop non contraibile a cost:

$$(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)) \quad \text{t.c.} \quad \begin{array}{ll} \bar{x}_1(0) = \bar{x}_1^0 & \bar{x}_2(0) = \bar{x}_2^0 \\ \bar{x}_1(1) = \bar{x}_2^0 & \bar{x}_2(1) = \bar{x}_1^0 \end{array}$$

$\hookrightarrow$ cammino che scambia le posizioni delle due particelle; (componendolo con sé stesso otteniamo cammino triviale!

- $\pi_1\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{\bar{x}_1 = \bar{x}_2\} \right) / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$

- Caratteri di $\mathbb{Z}_2 \rightarrow$ due possibilità

1) $\chi^B(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2$

2) $\chi^F(\alpha) = \begin{cases} 1 & \forall \alpha \text{ che sia scambio pari} \\ -1 & \forall \alpha \text{ " " " dispari} \end{cases}$

$K^B = \sum_\alpha \chi^B(\alpha) K_\alpha \quad \leftrightarrow \quad$ funzioni d'onda simmetriche per scambio di particelle $\qquad$ BOSONI

$K^F = \sum_\alpha \chi^F(\alpha) K_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad$ " " antisimmetriche " " $\qquad$ FERMIONI

CARATTERI di $\pi^1(Q)$ e CONNESSIONI su Q.

Data una connessione $U(1)$ A su Q che sia PIATTA, posso definire su ogni $\alpha \in \pi^1(Q)$

$$\chi(\alpha) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\oint_{\ell\in[\alpha]} A}$$

← dip. solo da $[\alpha]$, non da rap. ℓ.

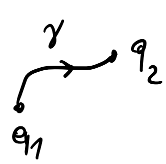
Qta espressione definisce un carattere per $\pi^1(Q)$.

D'altra parte, un carattere di $\pi^1(Q)$ è una mappa che associa a un cammino chiuso un elemento del gruppo $U(1)$. Qto associa una connessione al carattere (trasporto parallelo/olonomia). Siccome il carattere associa lo stesso elem. di $U(1)$ a tutti i cammini nella stessa classe di equiv., la connessione dev'essere piatta.

Quando parliamo di CONNESSIONE, intendiamo sempre a meno di 1-forme esatte (o meglio a meno di trasf. di gauge)

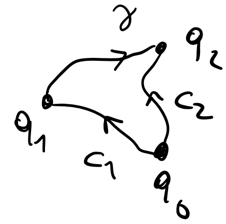
Consideriamo ora l'insieme delle classi di omotopia dei cammini da q_1 a q_2. Introducendo una connessione, possiamo associare ad ogni classe una fase

$$\chi_{12}(\alpha) \equiv e^{i\frac{e}{\hbar c}\int_{\gamma\in\alpha_{12}} A}$$



$\alpha_{12} \longleftrightarrow \alpha \in \pi^1(Q)$

Come si legano χ_{12} e χ ?



$$\to \quad e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_1} A} \; \chi_{12}(\alpha) \; e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2} A} = \chi(\alpha)$$

con i cammini c_1 e c_2 fissati.

Possiamo anche scrivere

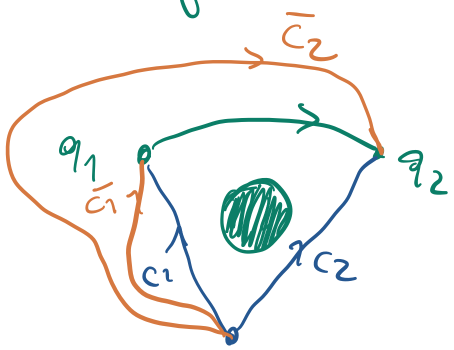
$$\chi_{12}(\alpha) = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{c_2 c_1^{-1}} A} \; \chi(\alpha)$$

qto è un particolare cammino da q_1 a q_2 che si può sempre scegliere giacere in un aperto semplicemente connesso

$\Downarrow$

Posso prendere A t.c. $\int_{c_2 c_1^{-1}} A = 0$
(A è piatta)

Se scelgo $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ diversi (|Ampl| inv., ma def. di Amp. cambia di una fase)



in modo che $c_2^{-1}\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}c_1$

stia in classe non-triviale

$\Rightarrow$ se $c_2 c_1^{-1}$ sta in aperto sempl. conn., allora $\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}$ non può stare in aperto sempl. connesso

Quindi fissata scelta di A t.c. $\int_{c_2 c_1^{-1}} A = 0$, allora

$\int_{\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}} A \neq 0 \longrightarrow$ la diff. di definizione di K è data

da $\quad e^{i\int_{\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}} A} = e^{i\int_{c_2^{-1}\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}c_1} A} = e^{i\int_{\mu\circ\lambda} A} = \chi(\mu)\chi(\lambda)$

vedi (*) alla fine di lezione precedente $\quad$ qto che si trova in

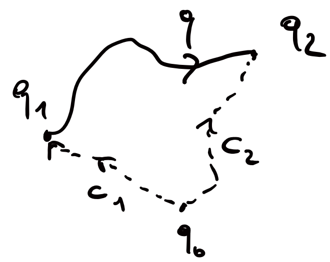
P.I. and Θ-term

Se sp. Q non-sempl. conn.: 1) aggiungere A (con $B=0$) cambia le predizioni della teoria quant. 2) ambiguità nel def. P.I.

Prendiamo la teoria di partenza e aggiungiamo un termine di derivata totale all'azione. Che legame c'è coi coeff. $\chi(\alpha)$?

$$S_T = \frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\ \dot{q}\cdot \underbrace{\bar{A}}_{A\text{ cost.}} = \frac{e}{c}\int_{q_1 \xrightarrow{\gamma} q_2} A$$

$$K(q_2,q_1;t_2,t_1) = \int_{\substack{q(t_1)=q_1\\ q(t_2)=q_2}} \mathcal{D}q\ e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_T)} =$$



$$= \sum_\alpha e^{\frac{i S_T}{\hbar}} \int \mathcal{D}q_\alpha\ e^{iS/\hbar}$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{q\in\alpha} A} K_\alpha(q_2,q_1) =$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2\alpha c_1^{-1}} A} K_\alpha(q_2,q_1) =$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2} A}\ e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{\alpha} A}\ e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_1^{-1}} A} K_\alpha(q_2,q_1)$$

$$= \underbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c}\left(\int_{c_2} A + \int_{c_1^{-1}} A\right)}}_{\text{fase irrilevante}} \sum_\alpha \chi(\alpha) K_\alpha(q_2,q_1) \qquad !$$

fase irrilevante $\leftarrow$ presente anche se sp. è sempl. connesso (può essere messo a zero con una trasf. di gauge)

Per calcolare l'ampiezza, uno si deve calcolare i singoli K_α, che sono definiti da P.I. standard.

In situazione semiclassica ($\hbar \to 0$) K_α è ben approssimato da $e^{iS[\varphi_{cl}]} (\det \Delta)^{a}$ ← integrale Gaussiano

difficile approssimare K_α

⇑

non è tipica traiett. class.

Tipicamente le classi α non contengono soluzioni classiche

Tuttavia, se passiamo all'Euclideo $S \to S_E$ $\quad \int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS} \to \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S_E}$

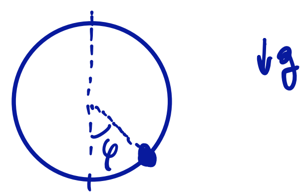
→ S_E ammette soluzioni alle sue eq. di Lagrange nelle classi di omotopia α, chiamate ISTANTONI

$$K_\alpha^E \sim e^{-S_E(\varphi_{ist})} (\det \Delta)^{a}$$

$\downarrow$ CONTINUAZIONE ANALITICA

$K_\alpha^{Mink.}$

PENDOLO



$Q = S^1$ ← circonferenza

$$\pi^1(S^1) = \mathbb{Z}$$

$\downarrow$

Ci aspettiamo quantizzazioni inequivalenti, parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \qquad V(\varphi) = b(1 - \cos\varphi) \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Termine topologico ($\leadsto$ interazione con un potenziale vettore)

$$L_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{(derivata totale)}$$

$\downarrow$

$$S_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \int dt \, \frac{d\varphi}{dt} = \theta \hbar \underbrace{W[\varphi]}_{\text{winding number } \in \mathbb{Z}}$$

Assumendo che $\varphi \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$

Istantoni per il pendolo: $\qquad t \to i\tau \qquad iS \to -S_E$

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + b(1 - \cos\varphi) \right]$$

Eq. del moto $\to$ eq. di Lagr. associate a S_E, cioè le soluz. sono t.c. $\delta S_E = 0$.

Sol.: $\varphi_{ist.}(\tau) = \pm 4 \, \text{arctg}\left(e^{\sqrt{b}(\tau - \tau_0)} \right)$

per $\tau \to -\infty \qquad \varphi \to 0$

per $\tau \to +\infty \qquad \varphi \to 2\pi$

$W(\varphi) = 1$

- $S_E(\varphi_{ist.})$ è finita
- $\varphi_{ist.}$ non può essere deformata in maniera continua alla soluz. "di vuoto", cioè $\varphi_0(\tau) = \varphi_{cost}$
- Esistono soluz. con $W(\varphi) \neq 1$, ce ne è una in ogni classe di omotopia, $\varphi^{\alpha}_{ist.}$

$$\cdot \quad K_\alpha \sim e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})} \cdot \det{}_\alpha(\cdots)^{-1/2}$$

$$K = \sum_\alpha \underbrace{\chi(\alpha)\, e^{-S_E^{(0)}(\varphi^\alpha_{ist.})}}_{e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})}} \cdot \det{}_\alpha(\cdots)^{-1/2}$$

$$e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})} \sim e^{-n(\cdots)}$$

$[\alpha] \sim n$

$\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z}$

contributo di K_α diminuisce all'aumentare di n

CARATTERE di un gruppo

- Sia G un gruppo ABELIANO.

  Un CARATTERE di G è una mappa

  $$\chi : G \to \mathbb{C}^*$$

  che è un GROUP HOMOMORPHISM, cioè

  $$\chi(g_1 \cdot g_2) = \chi(g_1)\,\chi(g_2) \qquad g_1, g_2 \in G$$

  → qta è una RAPPRESENTAZIONE 1dim. di G

  Se richiedo che rep. sia UNITARIA ($\chi(g^{-1}) = \chi(g)^* \Rightarrow |\chi(g)|^2 = 1$):

  $$\chi : G \to U(1)$$

- Ogni carattere χ è costante sotto coniugazione:

  $$\chi(h^{-1} g h) = \frac{1}{\chi(h)}\,\chi(g)\,\chi(h) = \chi(g)$$

- Un GRUPPO FINITO di ordine n ha n caratteri distinti $\chi_1, \dots, \chi_n$. χ_1 è la rep. triviale $\chi_1(g) = 1 \;\; \forall g \in G$.

  χ_1 è chiamato PRINCIPAL CHARACTER.

- Se G è ABELIANO, l'insieme dei caratteri forma un gruppo. La molt. è def. da

  $$\chi_1 \cdot \chi_2 : g \mapsto \chi_1(g)\,\chi_2(g) \quad \to \text{"CHARACTER GROUP"}$$

Es. $G = (\mathbb{Z}, +)$, $\chi(n) = e^{2\pi i n}$:

$$\chi(0) = 1 \quad (\text{Id.}) \quad ; \quad \chi(n+m) = e^{2\pi i(n+m)} = \chi(n)\,\chi(m)$$

Nota: Gruppi Semplici

→ Se G è un gruppo SEMPLICE, l'unica rappresentazione 1 dim. è il SINGOLETTO.

Dim.

Dimostriamo che i generatori di G sono rep. in $V_R = \mathbb{C}$ solo da 0 (sappiamo che dovessero così perché t^a saranno matrici 1×1 traceless). t^a sono matrici 1×1:

$$0 = [t^a, t^b] = f^{abc} t^c$$

$\Rightarrow t^c = 0$ se $f^{abc} \neq 0$ per almeno una coppia (a,b).

Se $\exists\, t^c$ t.c. $f^{abc} = 0 \quad \forall (a,b)$, allora $G = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{generato da } t^c}}{U(1)} \times G'$

↳ infatti in qto caso

$$[t^c, t^s] = i f^{csr} t^r = 0 \quad \forall s = 1, \dots, \dim G.$$

//

Qto ci dice che il gruppo dei caratteri di un gruppo semplice è banale.

Nota. Gruppo finito

Dato un gruppo finito di ordine K, si ha che $g^K = \mathbb{1} \Rightarrow \chi(g)^K = 1$ → immagine dei caratteri è $\mathbb{Z}_K$ (radici K-esime dell'unità)

Es. $S_3 = \{\text{permutaz. di 3 elem.}\} = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{id.}}}{123}, 132, 213, 231, 312, 321\}$

$\chi : S_3 \to \mathbb{Z}_6$

132   213
312   231

Ma in realtà χ mappa in $\mathbb{Z}_2$:

$\chi(123) = 1$ $\qquad$ $\chi(231)^2 = \chi(312)$

$\chi(132)^2 = 1$ $\qquad$ $\chi(312)^2 = \chi(231)$

$\chi(213)^2 = 1$

$\chi(321)^2 = 1$

Inoltre $\chi(132)\chi(213) = \chi(312) = \chi(231)$

$\Rightarrow \chi(312) = \chi(231) = 1$ $\longrightarrow$ perm. cicliche vengono mandate in 1

perm. odd vengono mandate o tutte in 1 o tutte in -1

($\chi(132)\cdot\chi(213) = \chi(312) = 1 \Rightarrow \chi(132)$ e $\chi(213)$ hanno stesso segno.)

Ho due χ : χ_0 e χ_1

$\chi_0 : (ijk) \longrightarrow 1 \quad \forall (ijk)$

$$\chi_1 : (ijk) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } (ijk) \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{S}_3 = \mathbb{Z}_2$$