

# SPAZIO DELLE CONFIG. in teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo una teoria di YM. Uniamo la gauge  $A_0^a = 0$   
coord. in  $Q$  (gauge fixing)

• La teoria è descritta dalle "coord"  $A_i^a(\bar{x})$   $i=1,2,3$   
↑ indice cartesio  $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$   
( $t$  è il parametro delle traiettorie)

• Per semplicità consideriamo  $G = SU(2)$ .

•  $A_i^a(\bar{x})$  sono ridondanti, a causa delle transf. di gauge residue:

$$A_i \mapsto U A_i U^{-1} + i \partial_i U U^{-1} \quad U: \mathbb{R}^3 \rightarrow SU(2)$$

$$A_0 = 0 \mapsto A_0 = 0$$

• Spazi rilevanti per noi:

$$\mathcal{A} = \{ \text{gauge fields } A_i^a(\bar{x}) \}$$

$$\Omega_x = \{ \text{transf. } U: \mathbb{R}^3 \rightarrow SU(2) \text{ t.c. } U(x) \rightarrow \mathbb{1} \text{ in } |\bar{x}| \rightarrow \infty \}$$

• Lo sp. delle config. è  $Q = \mathcal{A} / \Omega_x$

$\mathcal{A}$  è uno spazio AFFINE:

Dati  $A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \in \mathcal{A}$  qti due pti sono connessi dal cammino

$$A_i(\bar{x}; \tau) \equiv A_i^{(1)}(\bar{x})(1-\tau) + A_i^{(2)}(\bar{x})\tau \in \mathcal{A} \quad \tau \in [0,1]$$

→  $\mathcal{A}$  ha le proprietà di uno SPAZIO EUCLIDEO a d.o.m.  $\infty$ ,  
che è topologicamente triviale; in particolare  $\pi^1(\mathcal{A}) = 0$ .

$\Omega_4$   $G = SU(2)$ . Parametizziamo  $SU(2)$  nel seguente modo

$$U = \phi_0 \mathbb{1}_2 + i \phi_i \sigma_i \quad \text{con } \phi_0, \phi_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{e } \phi_0^2 + \sum_i \phi_i^2 = 1$$

$\rightarrow SU(2)$  è TOPOLOGICAM. UNA SFERA  $S^3$

questo implica  
che  $U^\dagger = U^{-1}$   
e  $\det U = 1$

Consideriamo ora una TRASFORMAZ. DI GAUGE  $U(x) = \phi_0(x) + i \phi_i(x) \sigma_i$

• In particolare,  $\phi_\mu(x)$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) sono mappe:  $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$

• Inoltre se  $U(x) \in \Omega_4$ ,  $U(x) \rightarrow \mathbb{1}$   
 $\bar{x} \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$  possiamo identificare i pti all'infinito:

$U(x)$  si comporta come una funzione:  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow S^3$

$\leadsto U: S^3 \rightarrow S^3$  se  $U \in \Omega_4$

Esplicitam:  $y_0 \equiv \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$      $y_i \equiv \frac{2x_i}{x^2 + 1}$      $y_0^2 + \sum_i y_i^2 = 1$

• diversi  $x_i$  danno diversi  $y_i$

•  $|x| \rightarrow \infty$  corrisponde a  $y_0 = 1$   $y_i = 0$

$$U \rightarrow \mathbb{1} \quad \text{in } y \rightarrow (1, 0, 0, 0)$$

Le mappe da  $S^3$  a  $S^3$  ricadono in CLASSI di OMOTOPIA appartenenti al gruppo  $\pi^3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ .

Qte mappe sono caratterizzate da un WINDING NUMBER  $w$ .

Esso dice quante volte  $S_x^3$  è avvolta su  $S^3$  di ambo.

Es.  $\pi^1(S^1) \quad \varphi: S^1_\theta \rightarrow S^1$

Volume dell'immagine è calcolato da un integrale su  $S^1_\theta$  usando il PULL-BACK della forma di volume:

$$\text{vol Im} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta \rightarrow w = \frac{\text{vol Im } S^1_\theta}{\text{vol } S^1_\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta$$

Es.  $\varphi(\theta) = n\theta \rightarrow w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n d\theta = n$ .

Torniamo a  $\pi^3(S^3)$ .

Consideriamo la mappa  $\phi_\mu: S^3 \rightarrow S^3$

Il WINDING NUMBER è dato dal rapporto fra il volume dell'immagine diviso il volume di  $S^3$  di arrivo (cioè  $2\pi^2$ ).

$$W(\phi) = \frac{\text{volume misurato con immagine di } \phi}{\text{volume misurato con misure standard su } S^3}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3_x} d\Omega^{(3)} = \frac{1}{12\pi^2} \int dx^3 \epsilon_{\mu\nu\kappa\rho} \epsilon^{ijk} \phi^\mu \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\kappa \partial_k \phi^\rho$$

pull-back di forme di volume  $\uparrow$   
 $\nwarrow$   $2\pi^2 \cdot 3!$

$$W(U) = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} dx^3 \text{Tr} [ \bar{u}^1 \partial_i U \bar{u}^1 \partial_j U \bar{u}^1 \partial_k U ] \epsilon^{ijk}$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} \text{Tr} [ ( \bar{u}^1 dU )^3 ]$$

$W$  ha le seguenti proprietà:

1)  $W$  è INVARIANTE per deformazioni continue (invariante topologica) delle mappe  $\phi_n(x) \rightarrow W$  è cost. su una classe di omotopia

→ Consideriamo una deformaz.  $\delta\phi^\mu$  t.c.  $\delta\phi^\mu \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$  (per preservare  $U \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \mathbb{1}$ )

Siccome  $\phi^\mu \phi^\mu = 1 \rightarrow \underline{\phi^\mu \delta\phi^\mu = 0}$ .

Allora:

$$\delta W = W(\phi + \delta\phi) - W(\phi) = \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\delta\phi^\mu \underbrace{d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta}_{\sim \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta \epsilon^{ijk} d^3x} + \underbrace{\phi^\mu d\delta\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\delta\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\delta\phi^\beta}_{\text{tutti qti termini sono uguali al primo, come si vede integrando per parti e rinominando indici e tenendo conto che } d^2=0 \text{ e } \delta\phi \rightarrow 0 \text{ al bordo.}}$$

$$= \frac{1}{3\pi^2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \delta\phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta$$

Ricordiamo  $\delta\phi^\mu \phi^\mu = 0 \Rightarrow \delta\phi^\mu = \epsilon^{\mu\sigma\gamma\lambda} \omega_{\sigma\gamma} \phi_\lambda$

con  $\omega_{\sigma\gamma}$  tensore antisimmetrico

(È come dire in 3d che se  $\delta\vec{v} \perp \vec{v}$ , allora

$$\delta\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} \text{ per qualche } \vec{\omega}.)$$



$$\delta W = \frac{1}{3\pi^2} \int d^3x \underbrace{(\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\mu\sigma\gamma\lambda})}_{\text{somme di prodotti di } \delta\text{-symbols } \delta_{\nu\alpha\beta}^{\sigma\gamma}} \omega_{\sigma\gamma} \phi_\lambda \underbrace{d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta}_{\phi_\lambda d\phi^\lambda = d(\phi_\lambda \phi^\lambda) = 0} = 0 //$$

2)  $W[U_1 U_2] = W[U_1] + W[U_2] \quad \leftarrow \pi_3(S^3) \text{ è isomorfo a } \mathbb{Z}$   
come gruppo.

$$W[U] = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}[(U^{-1}dU)^3]$$

$$(U_1 U_2)^{-1} d(U_1 U_2) = U_2^{-1} (U_1^{-1} dU_1) U_2 + U_2^{-1} dU_2$$

$$\equiv U_2^{-1} (A + B) U_2 \quad \left. \begin{array}{l} A \equiv U_1^{-1} dU_1 \\ B \equiv dU_2 U_2^{-1} \end{array} \right\} \text{1-forme}$$

$$W[U_1 U_2] = -\frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr}[(A+B)(A+B)(A+B)] =$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \int (\text{Tr} A^3 + \text{Tr} B^3 + 3\text{Tr}(A^2 B) + 3\text{Tr}(A B^2))$$

$$= W[U_1] + W[U_2] - \frac{1}{8\pi^2} \int \text{Tr}(-dAB + A dB)$$

$$A^2 = -dA \quad \leftarrow \quad dA = d(U_1^{-1} dU_1) = dU_1^{-1} dU_1 - U_1^{-1} dU_1 dU_1^{-1}$$

$$d(U_1^{-1} U_1) = 0 \quad \leftarrow \quad dU_1^{-1} U_1 + U_1^{-1} dU_1 \Rightarrow dU_1^{-1} = -U_1^{-1} dU_1 U_1^{-1}$$

$$B^2 = dB$$

$$= W[U_1] + W[U_2] + \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} d\text{Tr}(AB)$$

$\parallel$   $\int_{S^3}$  non ha bordo  
0

• Consideriamo  $U_0(x) = \mathbb{1}$  e  $U_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + i \frac{2xi}{x^2 + 1} \sigma^i$   
 $\downarrow$   $W=0$   $\downarrow$   $W=1$   $\uparrow$  vedi param.  $S^3$  con  $y_\mu$

$\Rightarrow U_1$  non può essere deformato in maniera continua a  $U_0$   
 Con la mappa  $U_1$  possiamo trovare rappresentanti in tutte le altre classi:  $W[U_1 \cdot U_1] = 2 \quad W[U_1^\dagger] = -1$   
 $(0 = W[U_1^\dagger U_1] = W[U_1^\dagger] + W[U_1])$

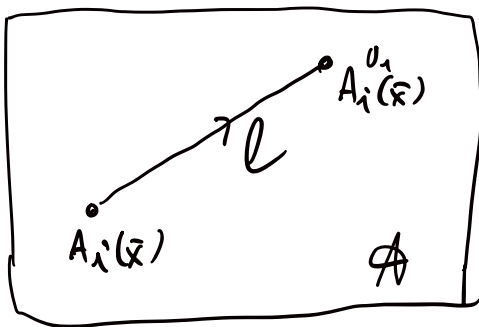
- $\Omega_x$  è l'UNIONE DISGIUNTA di componenti disconnesse etichettate dal winding number  $w \in \mathbb{Z}$  :

$$\Omega_x = \bigcup_{w=-\infty}^{+\infty} [w] \quad \pi^0(\Omega_x) = \mathbb{Z}$$

↑  
mappe nelle classi etichettate da  $w$ .

$$Q = \mathbb{A} / \Omega_x$$

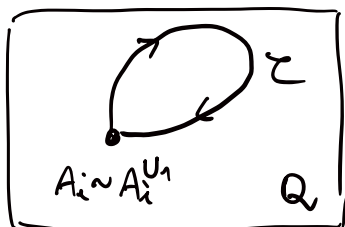
Consideriamo una linea in  $\mathbb{A}$  data da

$$A_i(\bar{x}, \tau) = A_i(\bar{x})(1-\tau) + A_i^{U_1}(\bar{x})\tau \quad \tau \in [0,1] \quad (*)$$


( $U_1$  è la mappa con  $w=1$ )

Nel quoziente, la linea  $l$  in  $\mathbb{A}$  diventa un loop, perché

$$A_i(\bar{x}) \sim A_i^{U_1}(\bar{x})$$



$$\tilde{A}(\tau) = A_{i0}^{U(\tau)} \quad U: [0,1] \rightarrow \Omega_x$$

f.c.  $U(0) = 1$   
 $U(1) = U_1$

qto vuol dire c'è omotopia tra 1 e  $U_1$

$\mathcal{L}$  è CONTRAIBILE in  $Q$ ?

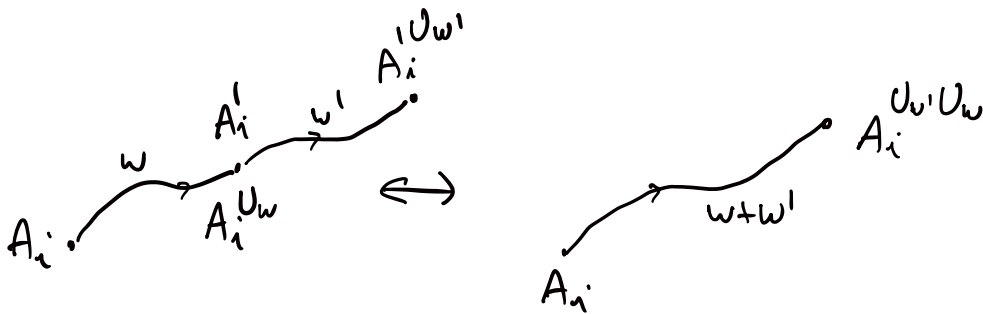
Lo sarebbe se  $l$  fosse deformabile a un pezzo di orbita. Ma questo sarebbe possibile solo se  $U_1(\bar{x})$  fosse deformabile in maniera continua alla mappa  $1$ . Questo non è possibile perché  $U_1$  e  $1$  appartengono a due classi di omotopia distinte

$$\Rightarrow \exists \mathcal{L} \text{ NON CONTRAIBILE} \Rightarrow \pi^1(Q) \neq 0$$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento sostituendo  $U_1$  con  $U_w$  con  $w \neq 0$  generico



Questi commutatori sono labelati da  $w \in \mathbb{Z}$  e commutatori con  $w$  diverso non possono essere dipendenti l'uno dall'altro.



Altri sono isomorfo di gruppo con  $\mathbb{Z}$  :

$$\pi^1(Q) \cong \mathbb{Z}$$

[ Finora  $G = SU(2) \cong S^3$  . Per un generico gruppo di Lie , esso ha un sottogruppo  $SU(2) \Rightarrow$  anche la mappa da  $S^3_x$  a  $G$  sono decomposte da  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$  .

Es. con  $\pi_1$  :  $S^1 \rightarrow S^1$  pendolo



AB effect

]

# INTEGRALE DI CAMMINO e $\theta$ -TERMINI

$Q$  è uno sp. topologico non-triviale ( $\pi^1(Q) = \mathbb{Z}$ )

$$\int_{\text{cammini in } Q} DA e^{iS[A]} = \sum_w \chi(w) \int_{D_w} DA e^{iS[A]} \quad (*)$$

$\uparrow$  CARATTERE di  $\pi^1(Q) = \mathbb{Z} \Rightarrow \chi(w) = e^{iw\theta}$

I campi  $A(\vec{x}, t)$  possono essere visti sia come funz. da  $\mathbb{R}^4$ ,  
oppure come cammini (parametrizzati da  $t$ ) in  $Q$ .

$\Rightarrow$  diverse teorie quantistiche associate alla stessa  
teoria classica, che sono parametrizzate da  $\theta \in [0, 2\pi[$

•  $w$  che compare in  $\chi(w)$  è il WINDING NUMBER

• (\*) può essere riscritta come  $\int DA e^{iS + iS_T}$ .

In questo caso il termine topologico è

$$S_T = \frac{\theta}{64\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\mu\nu}^e F_{\sigma\rho}^a = \theta c_2$$

che già sappiamo essere l'integrale di una derivata totale.

•  $\int_{\mathcal{D}_w} DA e^{-S_E(A)}$  è approssimata semiclassicamente da  
una solut. delle eq. del moto Euclideo,  
cioè da INSTANTONI.

[ Nota:  $d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sim d^4x^0 d^3x \epsilon^{0ijk} F_{0i} F_{jk} = d^4x_e F_{4i} F_{jk} \epsilon^{ijk} \in \mathbb{R}$  ]

$\Rightarrow e^{iS + iS_T} \rightsquigarrow e^{-S_E + iS_T}$



$$\bullet \quad e^{iS_T[A_w]} = \chi(w) = e^{i w \theta}$$

$$w = -\frac{1}{24\pi^2} \int \text{Tr}[(U^{-1}dU)^3] = \int d^3\bar{x} (K^0(A^0(\bar{x})) - K^0(A(\bar{x}))) =$$

$$= \int d^4x \partial_\mu K^\mu(A(x)) = -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta})$$

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left( A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta \right) \quad (\text{Nair pag. 365})$$

• Esempio di loop non contrattile

$$A_i(\bar{x}, x_4) = A_i(\bar{x}) \frac{1}{1+e^{x_4}} + \frac{e^{x_4}}{1+e^{x_4}} A_i^{U_1}(\bar{x})$$

$$\rightarrow A_i \quad x_4 \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow A_i^{U_1} \quad x_4 \rightarrow +\infty$$

$w=1$  in costruzione

Il contributo di tale cammino al P.I. è dato da

$$e^{-S[A_i] + i\theta}$$

C'è un'infinità di cammini con  $w=1$  e tutti contribuiscono a  $e^{i\theta} \int_{w=1} DA e^{-\frac{S(A)}{\epsilon}}$ .

• Il contributo dominante è dato dai cammini che minimizzano l'azione Euclidea. Tali cammini hanno le seguenti proprietà:

le seguenti proprietà:

- 1) sol. delle eq. del moto Euclideo. ( $\delta S_E = 0$ )

- 2)  $S_E[A_{cl}] < \infty$

3) apparteniamo a una data classe di omotopia (winding number)

4)  $A_i(\bar{x}, x_4) \rightarrow 0$  in  $x_4 \rightarrow -\infty$  e  $A_i(\bar{x}, x_4) \rightarrow iU_w^{-1} \partial_i U_w$  in  $x_4 \rightarrow +\infty$

(scelgo come pto base in i loop  $A_i=0$ )<sup>(\*)</sup>

5)  $A_0 = A_4 = 0$  (nostra scelta di gauge fissa)

1,2,3

→  $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$  ,  $w(A) = n \in \mathbb{Z}$  ,  $S_E(A) < \infty$

Le confj. che soddisfano queste prop. sono dette **INSTANTONI** !



$$\pi_{p_0}^1(Q) \cong \pi_{p_0'}^1(Q) \cong \pi^1(Q)$$