Funzioni derivabili

Esercizi svolti

1) Applicando la definizione di derivata, calcolare la derivata in $x = 0$ delle funzioni:

$$a) 2x - 5 \quad b) \frac{x-3}{x-4} \quad c) \sqrt{x+1} \quad d) x \sin x.$$

2) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

in $x = 1$.

3) Applicando le regole di derivazione calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$a(x) = 2x^3 - 9x + 7 \cos x$$

$$b(x) = x \sin x + \cos x$$

$$c(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$$d(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

$$e(x) = x^2 \log x + 3x$$

$$f(x) = \frac{\log x - 1}{\log x + 1}$$

$$g(x) = (x^2 + 1)^5$$

$$h(x) = \log \cos x + x \tan x$$

$$i(x) = \sqrt{4x^2 - 3}$$

$$l(x) = \sin \log \sqrt{x}$$

$$m(x) = \sqrt[5]{\sin 3x}$$

$$n(x) = \arctan(1 - x)$$

$$o(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$p(x) = (\log 3)^x.$$

4) Discutere la derivabilità in $x = 0$ delle funzioni:

$$a) f(x) = \sin |x| \quad b) g(x) = \cos \sqrt{|x|}.$$

5) Sia

$$f(x) = \begin{cases} (x - \beta)^2 - 2 & x \geq 0 \\ \alpha \sin x & x < 0 \end{cases}.$$

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

6) Discutere la derivabilità di $f(x) = |x^2 - 1|$.

7) Siano

$$f(x) = |x|^x \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-1/x^2}.$$

Verificare che f e g sono prolungabili con continuità su $\mathbb{R}$. Le funzioni f e g così prolungate risultano derivabili in $x = 0$?

8) Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x = 2$ al grafico di

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3).$$

9) Determinare per quali valori della x la funzione $f(x) = 3x + \sin x$ è crescente oppure decrescente.

10) Determinare massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = e^x + 3e^{-x}$ sul suo dominio.

11) Studiare il segno della derivata delle seguenti funzioni in un intorno del punto $x_0 = 0$ e discuterne il comportamento in $x_0 = 0$:

$$a) f(x) = 3 \sin x - 3x$$

$$b) f(x) = 4x + 4 \cos x.$$

12) Sia $f(x) = x^7 + x$. Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$. Verificare che f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$, determinare $(f^{-1})'$ tramite la formula della derivata della funzione inversa e calcolare $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(2)$.

13) Determinare gli eventuali asintoti della funzione

$$\sqrt{x^2 - 6x + 7}.$$

14) Trovare i punti del grafico di $f(x) = 5x^3$ nei quali la tangente

a) è parallela alla retta $y = 2x$;

b) è perpendicolare alla retta $y = x + 5$.

15) Dimostrare che le rette tangenti ai grafici delle due funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = \frac{1}{3x}$ sono tra loro perpendicolari nei punti di ascissa diversa da zero.

16) Verificare che

$$f(x) = \log(2+x) + 2 \frac{x+1}{x+2}$$

non ha altri zeri oltre a $x_0 = -1$.

17) Verificare che la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 1]$ e determinare un punto $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$f'(\theta) = f(1) - f(0).$$

18) Si consideri la funzione f , definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si dimostri che f è derivabile in $[0, +\infty)$ e che f' non è continua in 0.

19) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = \frac{x^4+3}{x^2-\alpha}$ soddisfi le ipotesi del Teorema di Lagrange sull'intervallo $[0, 1]$.

20) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x^2 + a \cos x$$

è convessa in $\mathbb{R}$.

21) Dimostrare che se $\alpha \geq 1$, allora

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

per ogni $x > -1$. (Tale disuguaglianza prende il nome di disuguaglianza di Bernoulli.)

22) Dimostrare che

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$$

per ogni $x \geq 0$.

23) Determinare il numero di soluzioni reali delle equazioni:

a) $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = 0$;

b) $x^4 + 4x + 12 = 0$;

c) $3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$.

24) Dimostrare o smentire la seguente affermazione:

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^5 + x = \lambda$ ha esattamente una soluzione.

25) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x \ln x = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

26) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x \cdot e^x = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

27) Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$x^2 \arctan x = a$$

ha esattamente una soluzione.

SOLUZIONI

1) a) Si ha: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5 - (-5)}{x} = 2$ b) $-\frac{1}{16}$
 c) Si ha: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$ d) 0.

2) a) Ricordiamo che l'equazione della retta tangente alla curva in $x = 1$ è $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. Occorre quindi calcolare la derivata della funzione f in $x_0 = 1$. Si ha $f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$ e, in particolare, $f'(1) = -2$.

L'equazione richiesta è allora $y(x) = -1 - 2(x - 1)$.

3)

a) $6x^2 - 9 - 7 \sin x$ b) $x \cos x$ c) $\frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$
 d) $-\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$ e) $2x \log x + x + 3$ f) $\frac{2}{x(\log x + 1)^2}$
 g) $10x(x^2 + 1)^4$ h) $\frac{x}{\cos^2 x}$ i) $\frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 3}}$
 l) $\frac{1}{2x} \cos \log \sqrt{x}$ m) $\frac{3 \cos 3x}{5 \sqrt[5]{\sin^4 3x}}$ n) $-\frac{1}{x^2 - 2x + 2}$
 o) $\arcsin x$ p) $\log(\log 3)(\log 3)^x$.

4) a) $x = 0$ è un punto angoloso per f .

Calcoliamo, infatti, le derivate laterali di f in $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^+ \frac{\sin x - 0}{x} = 1 \qquad e \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^- \frac{\sin(-x) - 0}{x} = -1.$$

b) La derivata destra di g in 0 vale $-\frac{1}{2}$, quella sinistra $\frac{1}{2}$, quindi g non è derivabile in $x = 0$.

5) Imponiamo innanzitutto che la funzione f sia continua sul suo dominio. È sufficiente imporre che f sia continua nel punto di raccordo $x = 0$, ottenendo $\beta = \pm\sqrt{2}$.

La funzione è poi derivabile ovunque tranne, al più, in $x = 0$. Per discutere la derivabilità in $x = 0$, calcoliamo la derivata f' . Si ottiene $f'(x) = 2(x - \beta)$ se $x > 0$ e $f'(x) = \alpha \cos x$ se $x < 0$. Sia $\beta = \pm\sqrt{2}$, in modo che f sia continua in $x = 0$. Calcoliamo ora il limite di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0$. Per un noto teorema, se tale limite esiste e vale $\ell \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in $x = 0$ e vale $f'(0) = \ell$. Risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2\beta$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \alpha$, quindi f è derivabile se $\alpha = -2\sqrt{2}$ e $\beta = \sqrt{2}$ oppure se $\alpha = 2\sqrt{2}$ e $\beta = -\sqrt{2}$.

6) f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

In $x = -1$ f non è derivabile (la derivata destra vale 2, quella sinistra -2); in $x = 1$ f non è derivabile (la derivata destra vale 2, quella sinistra -2).

Per $x \neq \pm 1$, f è uguale al polinomio $x^2 - 1$ oppure al polinomio $1 - x^2$, ed è pertanto derivabile, con derivata data, rispettivamente, da $2x$ e da $-2x$.

7) f è prolungabile per continuità in $x = 0$. Più precisamente, dal fatto che $|x|^x := e^{x \ln |x|}$ segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln |x|} = 1.$$

Poniamo ora

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} |x|^x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x \ln |x|} - 1}{x \ln |x|} \right) \ln |x| = -\infty.$$

Il prolungamento di f non è quindi derivabile in 0.

La funzione g è prolungabile per continuità in $x = 0$. Vale infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Poniamo allora

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} (t \cdot e^{-t^2}) = 0.$$

Il prolungamento di g è quindi derivabile in 0, con $\tilde{g}'(0) = 0$.

8) Osserviamo innanzitutto che f è derivabile in $x = 2$ e che

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2x(x+2)}{(x^2 - 1)^2} - \frac{2}{2x - 3}$$

per $x > \frac{3}{2}$. In particolare, $f'(2) = -\frac{31}{9}$. Poichè $f(2) = \frac{4}{3}$, la retta tangente ha equazione $y = -\frac{31}{9}x + \frac{74}{9}$.

9) Calcoliamo la derivata di f e imponiamo che sia maggiore o uguale a zero. Si ottiene

$$f'(x) = 3 + \cos x.$$

Poichè f' è maggiore di zero su $\mathbb{R}$, f risulta crescente per ogni valore della x .

10) Osserviamo innanzitutto che f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è ivi derivabile.

Calcoliamo poi la derivata di f . Risulta

$$f'(x) = e^x - 3e^{-x}.$$

Quindi $f'(x) > 0$ se $e^{2x} > 3$, cioè se $x > \frac{1}{2} \ln 3$ e $f'(x) < 0$ se $x < \frac{1}{2} \ln 3$. Allora f ha minimo in $x = \frac{1}{2} \ln 3$.

11) a) Vale $f'(x) = 3 \cos x - 3$, quindi $f'(0) = 0$ e $f'(x) < 0$ per ogni x appartenente a un intorno bucato dell'origine. Allora il punto $x_0 = 0$ è un punto di flesso discendente.

b) Il punto $x_0 = 0$ è un punto di flesso ascendente.

12) La funzione f è continua e strettamente crescente su $\mathbb{R}$, quindi invertibile su $\mathbb{R}$. La sua derivata, inoltre, non si annulla mai in $\mathbb{R}$, così che la funzione inversa f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$ e per ogni $x \in \text{dom}((f^{-1})) = \mathbb{R}$ si ha che $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{7(f^{-1}(x))^6 + 1}$.

Poichè $f(0) = 0$, si ha che $f^{-1}(0) = 0$, quindi $(f^{-1})'(0) = 1$.

Poichè $f(1) = 2$, si ha che $f^{-1}(2) = 1$, quindi $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{8}$.

13) Osserviamo innanzitutto che, poiché $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{(3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2})\}$, ha senso cercare un asintoto obliquo sia a $+\infty$ sia a $-\infty$.

Calcoliamo ora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{6}{x} + \frac{7}{x^2}} = \pm 1.$$

Calcoliamo poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x + 7}{\sqrt{x^2 - 6x + 7} + x} = -3$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x + 7}{\sqrt{x^2 - 6x + 7} - x} = 3.$$

Allora f ha un asintoto obliquo destro dato da $y(x) = x - 3$ e un asintoto obliquo sinistro dato da $y(x) = -x + 3$.

- 14) a) Imponendo la condizione $x^2 = \frac{2}{15}$, si determina $x = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$.
 b) La condizione da imporre è in questo caso $15x^2 = -1$, così che non esistono punti soddisfacenti la condizione richiesta.
- 15) Le rette tangenti a f e g hanno coefficiente angolare rispettivamente uguale a $m(x) = 3x^2$ su $\mathbb{R}$ e $n(x) = -\frac{1}{3x^2}$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poichè per ogni $x \neq 0$ risulta $m(x) \cdot n(x) = -1$, le rette tangenti a f e g sono ortogonali.
- 16) Si ha che $\text{dom}(f) = (-2, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Inoltre f è strettamente crescente su $\text{dom}(f)$. Quindi f non ha altri zeri oltre $x_0 = -1$.
- 17) La funzione f è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$, soddisfa quindi le ipotesi del Teorema di Lagrange. Risulta inoltre $\theta = \frac{1}{3}$.
- 18) Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile come somma e composizione di funzioni derivabili. In $x = 0$ calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + x \sin \frac{1}{x}) = 0,$$

quindi f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Risulta inoltre $f'(x) = 4x + 2 \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e $f'(0) = 0$. Poichè $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste, la funzione derivata f' non è continua in $\mathbb{R}$

- 19) Bisogna imporre che f sia continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$. La funzione f soddisfa queste due ipotesi se $x^2 \neq \alpha$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Se $\alpha < 0$, questa condizione è sempre verificata.

Se $\alpha = 0$, non è verificata perchè in $x = 0$ il denominatore si annulla.

Se $\alpha > 0$, bisogna imporre $x \neq \pm\sqrt{\alpha}$ per ogni $x \in [0, 1]$, cioè $x \neq \sqrt{\alpha}$ per ogni $x \in [0, 1]$. Questo equivale a richiedere che $\sqrt{\alpha}$ non assuma valori compresi fra 0 e 1, cioè α non deve appartenere a $[0, 1]$.

In conclusione, le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte per $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$, non sono soddisfatte per $\alpha \in [0, 1]$.

20) f è convessa se $|a| \leq 2$.

Infatti, se $a = 0$ f è ovviamente convessa. Più in generale, la derivata seconda di f , $f''(x) = 2 - a \cos x$, è positiva se $a \cos x \leq 2$.

Se $a > 0$, questa disequazione è banalmente verificata da tutte le x tali che $\cos x < 0$. Se invece $\cos x \geq 0$, allora si ha $0 \leq a \cos x \leq a \leq 2$, quindi la condizione è $0 \leq a \leq 2$.

Se $a < 0$, la disequazione $a \cos x \leq 2$ è verificata per ogni a se $\cos x > 0$. Se $\cos x \leq 0$, allora essa si può scrivere come $|a \cos x| \leq 2$, che, come nel caso precedente, conduce a $|a| \leq 2$.

Si conclude che f è convessa su tutto $\mathbb{R}$ se $|a| \leq 2$.

21) Sia $f(x) := (1+x)^\alpha$, $x > -1$. Derivando otteniamo $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ e $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$. Poichè f'' è positiva, f è convessa, quindi vale

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \alpha x.$$

Un'altra possibilità consiste nel definire $g(x) := (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$, per $x > -1$. Si osserva che $g(0) = 0$ e che $g'(x) > 0$ per $x > 0$ e $g'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$. Allora $g(x) \geq 0$ per ogni $x > -1$.

22) Sia $f(x) := \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, $x \geq 0$. Si ha $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ e $f''(x) = -\sin x + x$. È noto che $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$, per cui $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$ e f è convessa. Vale quindi la stima $f(x) \geq f(0) + f'(0)(x-0) = 0$ su tutto il semiasse positivo.

23) a) La funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$ ed è strettamente crescente: l'equazione ammette quindi una sola soluzione reale.

b) La funzione $f(x) = x^4 + 4x + 12$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$; f ha minimo in $x = -1$, ove assume il valore 9. L'equazione $f(x) = 0$ non ha quindi soluzioni reali.

c) La funzione $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ e a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$. Consideriamo ora la derivata di f , $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$. f è strettamente crescente per $x < -1$ e $x > 1$, decrescente in $(-1, 1)$; $x = 0$ rappresenta un punto di flesso discendente. Dal momento che $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$, l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali (una minore di -1 , una compresa fra -1 e 1 , una maggiore di 1).

24) L'affermazione è vera.

Infatti, posto $f(x) = x^5 + x$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$. Quindi l'equazione ha almeno una soluzione. Il fatto che tale soluzione sia unica segue dal fatto che f è strettamente crescente.

25) Studiamo la funzione $f(x) = x \ln x$, definita per $x > 0$. Risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$.

Inoltre, $f'(x) = \ln x + 1$, quindi f è crescente per $x > \frac{1}{e}$. f ha quindi minimo in $\frac{1}{e}$, ove assume il valore $-\frac{1}{e}$. Si ossono allora concludere i seguenti fatti.

Se $\lambda < -\frac{1}{e}$ non vi sono soluzioni.

Se $\lambda = -\frac{1}{e}$ esiste una soluzione.

Se $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$ vi sono due soluzioni.

Se $\lambda \geq 0$ esiste una soluzione.

26) Studiamo la funzione $f(x) = xe^x$, definita per $x \in \mathbb{R}$. Risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$.

Inoltre, $f'(x) = e^x(x+1)$, quindi f è crescente per $x > -1$. f ha quindi minimo in $x = -1$, ove assume il valore $-\frac{1}{e}$. Si ossono allora concludere i seguenti fatti.

Se $\lambda < -\frac{1}{e}$ non vi sono soluzioni.

Se $\lambda = -\frac{1}{e}$ esiste una soluzione.

Se $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$ vi sono due soluzioni.

Se $\lambda \geq 0$ esiste una soluzione.

27) Studiamo la funzione $f(x) = x^2 \arctan x$, definita per $x \in \mathbb{R}$. Risulta $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$.

Inoltre, $f(0) = 0$ e $f'(x) = 2x \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}$. Osservando che $x \arctan x$ è sempre maggiore o uguale a zero (e si annulla solo in zero) e che $\frac{1}{x^2+1}$ è sempre minore o uguale a uno (e vale uno solo in zero), si conclude che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Quindi f è strettamente crescente. In particolare, l'equazione proposta ammette sempre un'unica soluzione.