ESERCIZI CON SOLUZIONE DETTAGLIATA

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2 \ .$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f. Determinare inoltre gli zeri di f e studiarne il segno.

b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

c) Determinare gli intervalli di convessità e di concavità, e i flessi di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

e) Discutere l'esistenza di soluzioni dell'equazione $e^{2x} - 3e^x = \alpha$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

<u>Svolgimento</u>

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbf{R}$. Inoltre, possiamo scrivere

$$f(x) = (e^x - 1)(e^x - 2) \ .$$

La funzione ammette dunque due zeri, $x = 0$ e $x = \log 2$. È positiva per $x < 0$ e per $x > \log 2$ ed è invece negativa per $0 < x < \log 2$. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \ , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ .$$

La funzione ammette quindi come asintoto orizzontale a sinistra la retta di equazione $y = 2$ mentre, come si verifica facilmente, non ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$. La derivata di $f(x)$ è data da

$$f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x = e^x(2e^x - 3) \ ,$$

la quale si annulla solo per $x = \log \frac{3}{2}$, è negativa per $x < \log \frac{3}{2}$, e positiva nel caso opposto. Conseguentemente, la funzione decresce per $x < \log \frac{3}{2}$, e cresce per $x > \log \frac{3}{2}$. Poichè si tratta di una funzione continua (si applicano i teoremi noti sulla somma, sul prodotto e sulla composizione di funzioni continue) possiamo anche concludere che per $x = \log \frac{3}{2}$ si ha un punto di minimo. Calcoliamo infine la derivata seconda

$$f''(x) = 4e^{2x} - 3e^x = e^x(4e^x - 3) \ ,$$

dalla quale si deduce l'esistenza di un punto di flesso per $x = \log \frac{3}{4}$. Più precisamente, la funzione risulta concava per $x < \log \frac{3}{4}$, convessa per $x > \log \frac{3}{4}$.

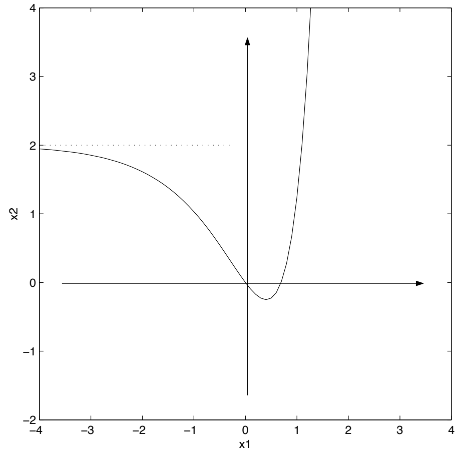

Figura 1: Funzione dell'Esercizio 1

Il grafico della funzione è mostrato nella Figura ??. Si osserva che l'unico punto di minimo trovato è un punto di minimo assoluto, mentre non ci sono punti di massimo (la funzione non è superiormente limitata).

Per rispondere all'ultimo quesito, cominciamo con l'osservare che l'ordinata del punto di minimo di $f(x)$ è uguale a $-1/4$. Poniamo per comodità $\beta = 2 + \alpha$. Ispezionando il grafico si rileva la seguente situazione:

1) nessuna soluzione se $\beta < -\frac{1}{4}$,

2) due soluzioni se $-\frac{1}{4} < \beta < 2$,

3) una sola soluzione se $\beta \geq 2$ oppure $\beta = -\frac{1}{4}$.

Tornando al parametro originale, si ha:

1) nessuna soluzione se $\alpha < -\frac{9}{4}$,

2) due soluzioni se $-\frac{9}{4} < \alpha < 0$,

3) una sola soluzione se $\alpha \geq 0$ oppure $\alpha = -\frac{9}{4}$.

Esercizio 2.
È data la funzione

$$f(x) = x + \log(x^2 - 5x + 6) \ .$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.

b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

c) Determinare gli intervalli di convessità e di concavità.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento

La funzione è definita per $x \in I \cup J$, dove $I = (-\infty, 2)$ e $J = (3, +\infty)$. Inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \ ,$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Il calcolo di questi limiti è semplice: l'unico che si presenta in forma indeterminata è il primo, che si risolve ricordando che, per $x \to +\infty$, il logaritmo di x è un infinito di ordine inferiore ad ogni potenza della x. Non vi sono asintoti obliqui.

Per le proprietà dei logaritmi, si ha

$$x \in I \Longrightarrow f(x) = x + \log(2-x) + \log(3-x)$$

e

$$x \in J \Longrightarrow f(x) = x + \log(x-2) + \log(x-3) \ .$$

In questo modo resta facilitato il calcolo della derivata. Si noti che non è consentito adottare la stessa rappresentazione sia per $x \in I$ che per $x \in J$: questo dipende dal fatto che il logaritmo è definito solo per valori positivi del suo argomento. Si ha

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-5}{x^2-5x+6} = \frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$$

sia per $x \in I$ che per $x \in J$. L'equazione $x^2-3x+1=0$ ha due soluzioni, $x = (3 \pm \sqrt{5})/2$, ma solo una di queste (quella che si ottiene prendendo il segno meno) appartiene al dominio della funzione. Inoltre,

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x > 3$$

mentre

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 2 \ .$$

Si riconosce pertanto che $f(x)$ presenta un punto di massimo relativo (non assoluto) per $x = (3-\sqrt{5})/2$. Calcoliamo infine la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{-2x^2+10x-13}{(x^2-5x+6)^2} \ .$$

Il trinomio $-2x^2+10x-13$ non ha radici reali, ed assume sempre valori negativi. Ne segue che la funzione non presenta flessi, ed è concava sia su I e che su J (ma non su $I \cup J$).

Infine, per poter tracciare fedelmente il grafico di $f(x)$, discutiamo l'esistenza di zeri sfruttando le informazioni in nostro possesso. Per quanto riguarda l'intervallo J, sappiamo che i limiti agli estremi sono rispettivamente $-\infty$ a sinistra e $+\infty$ a destra. Consideriamo quindi l'intervallo I. Poiché la funzione tende a $-\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to 2^-$, si tratta di capire se esistono

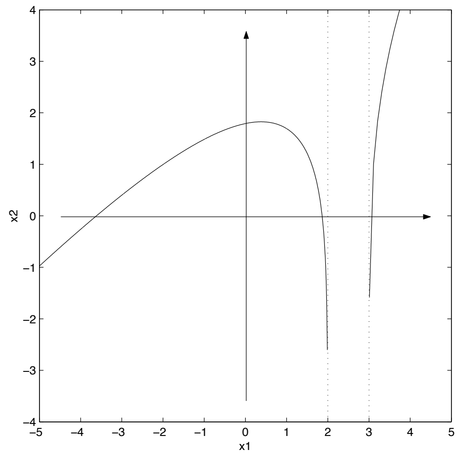

Figura 2: Funzione dell'Esercizio 2

o meno valori della $x \in I$ tali che $f(x) > 0$. È naturale provare a calcolare il valore di f in corrispondenza del punto di massimo: purtroppo in questo caso il calcolo di tale valore non è agevole, se non si dispone di una calcolatrice. Tuttavia è chiaro che $f(0) = \log 6$ che è certamente positivo.

In virtù del Teorema sull'esistenza degli zeri, e tenendo conto delle conclusioni precedenti relative ai tratti di monotonia, possiamo accertare l'esistenza di tre (e solo tre) zeri della funzione: uno si trova nell'intervallo $(-\infty, 0)$, un secondo nell'intervallo $(0, 2)$ e il terzo nell'intervallo $(3, +\infty)$. Il grafico è riprodotto nella Fig. **??**.

Esercizio 3.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \log(2 - x^2)}.$$

a) Determinare il dominio.

b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

d) Mostrare che f è invertibile su $\operatorname{dom} f \cap (-\infty, -1)$, determinare l'espressione esplicita dell'inversa precisandone dominio e immagine.

Svolgimento

a) Si ha che $\operatorname{dom} f = \left[-\sqrt{2 - e^{-1}}, \sqrt{2 - e^{-1}}\right]$ e che f è pari. Si osserva che f è continua in $\operatorname{dom} f$ in quanto composizione di funzioni continue.

b) Poichè f è continua e $\operatorname{dom} f$ è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti.

Si osserva che f è derivabile in $\left(-\sqrt{2-e^{-1}}, \sqrt{2-e^{-1}}\right)$ in quanto composizione di funzioni derivabili, con

$$f'(x) = \frac{x}{(x^2-2)\sqrt{1+\log\left(2-x^2\right)}} .$$

Si ha che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Per stabilire se questo punto è un estremo e, in caso affermativo, se si tratta di massimo o di minimo, studiamo il segno di f'. Si ha che

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt{2-e^{-1}} < x < 0.$$

Quindi f è crescente in $\left[-\sqrt{2-e^{-1}}, 0\right]$ mentre f è decrescente in $\left[0, -\sqrt{2-e^{-1}}\right]$. Così $x = 0$ è un punto di massimo, e più precisamente di massimo assoluto per f.

I punti di minimo assoluto sono due e coincidono con gli estremi del dominio, $x = \pm\sqrt{2-e^{-1}}$. Si noti che

$$\lim_{x\to\left(\sqrt{2-e^{-1}}\right)^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\left(-\sqrt{2-e^{-1}}\right)^+} f'(x) = +\infty$$

(non esistono le derivate laterali agli estremi del dominio).

c) Tenendo conto delle informazioni ottenute ai passi *a*) e *b*) disegnamo un grafico qualitativo di f (Fig. **??**). Osserviamo che f si annulla in $x = \pm\sqrt{2-e^{-1}}$ e che $f(0) = \sqrt{1+\log 2}$.

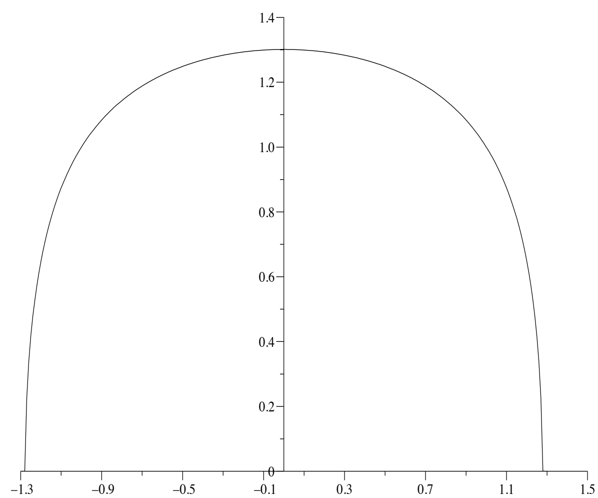

Figura 3: Grafico di f.

d) Per comodità, indichiamo con g la restrizione della funzione data f a $\operatorname{dom} f \cap (-\infty, -1)$, cioè a $\left[-\sqrt{2-e^{-1}}, -1\right)$. È chiaro che g è strettamente crescente, cioè iniettiva. La funzione g è quindi invertibile, relativamente alla propria immagine. Essendo

$$\lim_{x\to -1} g(x) = 1,$$

l'immagine di g è data dall'intervallo $[0,1)$. Indicata con h l'inversa di g, si ha allora

$$\operatorname{dom} h = [0,1), \qquad \operatorname{im} h = \left[-\sqrt{2-e^{-1}}, -1\right).$$

Per determinare l'espressione esplicita di h, poniamo $y = g(x)$ e ricaviamo x in funzione di y. Si ottiene

$$x = -\sqrt{2 - e^{y^2-1}}.$$

Ripristinando la lettera x per la variabile indipendente e la y per la variabile dipendente si ha in definitiva

$$h(x) = g^{-1}(x) = -\sqrt{2 - e^{x^2-1}}.$$

Esercizio 4.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5 + 2\log|x|}{2 + \log|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.

b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

c) Determinare gli intervalli di concavità e convessità, e gli eventuali punti di flesso di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

<u>Svolgimento</u>

a) Si ha che $\operatorname{dom} f = \left(-\infty, -e^{-2}\right) \cup \left(-e^{-2}, e^{-2}\right) \cup \left(e^{-2}, +\infty\right)$ e che f è pari. Possiamo quindi limitarci a studiare la funzione per $x \geq 0$. In particolare, per $x > 0$ la funzione si riscrive come

$$f(x) = \frac{5 + 2\log x}{2 + \log x}\ .$$

Si ha $f(x) = 0$ per $x = e^{-\frac{5}{2}}$. Inoltre, La funzione assume valori positivi per $0 \leq x < e^{-\frac{5}{2}}$ e per $x > e^{-2}$, mentre assume valori negativi per $e^{-\frac{5}{2}} < x < e^{-2}$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \text{la retta } y = 2 \text{ è un asintoto orizzontale di } f,$$

$$\lim_{x\to(e^{-2})^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{la retta } x = e^{-2} \text{ è un asintoto verticale di } f.$$

Inoltre
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2.$$
Quindi f è continua a destra in 0: di fatto, tenendo conto delle simmetrie, si capisce che f è continua anche a sinistra per $x \to 0$. Poichè f è continua in ogni $x \in \operatorname{dom} f$ con $x \neq 0$ in quanto composizione di funzioni continue, possiamo concludere che f è continua su tutto il suo dominio.

b) Si osserva che f è derivabile per ogni $x > 0$ ($x \neq e^{-2}$), in quanto composizione di funzioni derivabili con
$$f'(x) = -\frac{1}{x(2+\log x)^2} \; .$$
Invece f non è derivabile in $x = 0$, infatti
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \qquad \text{(e quindi, per simmetria,} \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty).$$
In particolare $x = 0$ è una cuspide per f. Si osserva che f' non si annulla mai. Ne segue che gli eventuali punti di estremo sono da ricercare fra i punti di non derivabilità di f, ossia l'unico punto di estremo è $x = 0$. Si ha che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ ($x \neq e^{-2}$). Quindi f è decrescente in $(0, e^{-2})$ e in $(e^{-2}, +\infty)$. Inoltre $x = 0$ è un punto di massimo relativo (o locale) per f.

c) Si osserva che f' è a sua volta derivabile per ogni $x > 0$ ($x \neq e^{-2}$) in quanto composizione di funzioni derivabili con
$$f''(x) = \frac{\log x + 4}{x^2(2+\log x)^3} \; .$$
Si osserva che $f''(x) = 0$ per $x = e^{-4}$. Si ha che
$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < e^{-4}, \quad x > e^{-2}.$$
Quindi f è convessa in $(0, e^{-4})$ e $(-e^{-2}, +\infty)$, mentre f è concava in (e^{-4}, e^{-2}). Inoltre $x = e^{-4}$ è un punto di flesso per f.

d) Tenendo conto delle informazioni ottenute ai passi *a*), *b*) e *c*), e ricordando che f è pari, disegnamo un grafico qualitativo di f (Fig. **??**). La Fig. **??** mostra un ingrandimento del grafico in prossimità del punto di cuspide.

Esercizio 5.
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{2}|x+1| - \operatorname{arctg}|x| \; .$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.

b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Determinare inoltre gli eventuali punti di non derivabilità della f.

c) Determinare gli intervalli di concavità e convessità, e gli eventuali punti di flesso di f.

d) Disegnare un grafico qualitativo di f. Discutere l'esistenza di zeri e il segno di f.

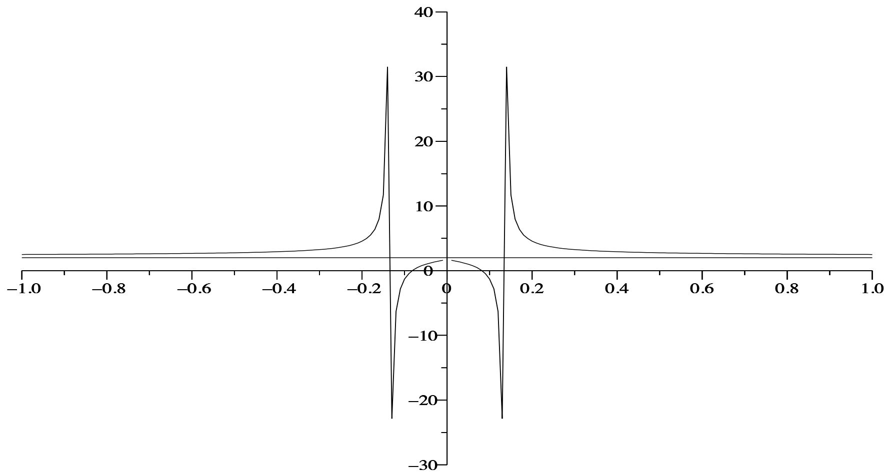

Figura 4: Grafici di f, dell'asintoto orizzontale e degli asintoti verticali.

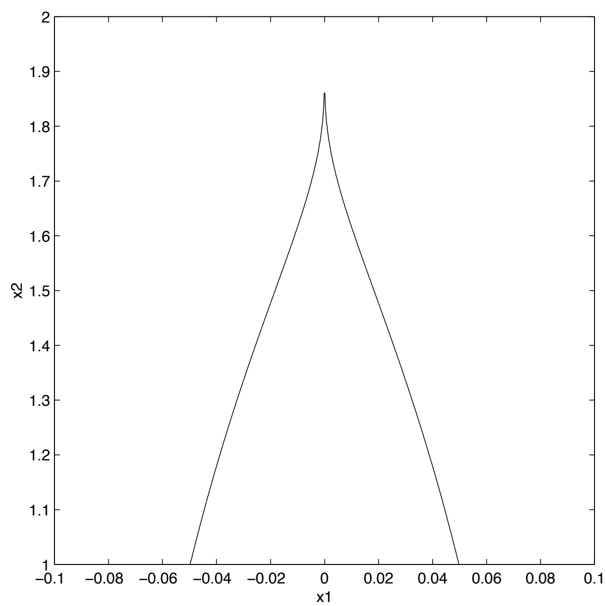

Figura 5: Ingrandimento nel punto di cuspide.

Svolgimento

Il dominio della funzione è l'intero asse reale. Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Si trovano inoltre i due asintoti obliqui di equazione $y = (-x-1-\pi)/2$ a sinistra, e $y = (x+1-\pi)/2$ a destra. Per poter procedere al calcolo della derivata, è necessario suddividere il dominio in tre sottoinsiemi, in modo da poter fare a meno del valore assoluto nell'espressione della funzione. Più precisamente, si ha

(1) $f(x) = -\dfrac{x+1}{2} + \operatorname{arctg} x$ per $x \in I = (-\infty, -1)$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{2} + \operatorname{arctg} x$ per $x \in J = (-1, 0)$

(3) $f(x) = \dfrac{x+1}{2} - \operatorname{arctg} x$ per $x \in K = (0, +\infty)$.

Corrispondentemente,

(1) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2(1+x^2)}$ per $x \in I = (-\infty, -1)$

(2) $f'(x) = \dfrac{x^2+3}{2(1+x^2)}$ per $x \in J = (-1, 0)$

(3) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{2(1+x^2)}$ per $x \in K = (0, +\infty)$.

Esaminando il segno di $f'(x)$ separatamente su I, J e K, si trova che

(1) $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$;

(2) $f'(x) > 0$ per ogni $x \in J$;

(3) $f'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$ e $f'(x) > 0$ per $x > 1$.

In particolare, $f'(x) = 0$ per $x = 1$, ove la funzione presenta un punto di minimo. Osserviamo anche che

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \frac{3}{2} \ , \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x) = -\frac{3}{2} \ .$$

I punti $x = -1$ e $x = 0$ sono cioè punti di non derivabilità della funzione. D'altra parte, poiché la funzione è continua, tenendo conto della monotonia, possiamo concludere che $x = -1$ è un punto di minimo e che $x = 0$ è un punto di massimo. Si noti che non sarebbe stato possibile dedurre che $x = -1$ è un punto stazionario (tantomeno un punto estremo) sulla base dell'unica informazione che $f'(x)$ tende a zero quando $x \to -1^-$.

Passiamo al calcolo della derivata seconda:

(1) $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ per $x \in I = (-\infty, -1)$

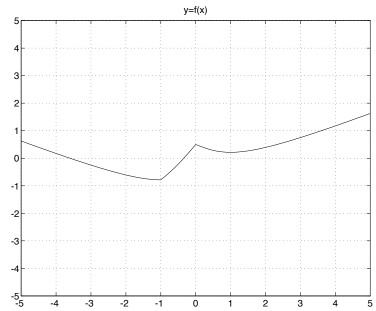

Figura 6: Funzione dell'Esercizio 5

(2) $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ per $x \in J = (-1, 0)$

(3) $f''(x) = \dfrac{2x}{2(1+x^2)^2}$ per $x \in K = (0, +\infty)$.

Non vi sono flessi, e la funzione risulta convessa su ciascuno dei tre intervalli I, J, K, presi separatamente (ma non è convessa per $x \in \mathbf{R}$).

Osserviamo infine che $f(1) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$; invece $f(-1) = -\frac{\pi}{4} < 0$. Tenendo conto del Teorema sull'esistenza degli zeri e di quanto già stabilito a proposito della monotonia della funzione, possiamo concludere che esistono due zeri x' e x'', il primo appartenente all'intervallo I e l'altro appartenente all'intervallo J. La funzione risulta quindi positiva per $x < x'$ e per $x > x''$, mentre risulta negativa per $x' < x < x''$.

I punti x' e x'' sono soluzioni di equazioni non algebriche, che possono essere determinati solo con metodi di approssimazione numerica. Il grafico qualitativo di f è presentato nella Fig. **??**. Osserviamo che il minimo corrispondente all'ascissa $x = -1$ è assoluto, mentre non ci sono massimi assoluti.