Prof. V. Armenio

Dipartimento di Ingegneria e Architettura, Università di Trieste, Trieste, Italy

EQUAZIONI IN FORMA INDEFINITA

Approccio globale e differenziale
Conservazione della massa :
- Approccio Euleriano, forma differenziale
- Approccio Lagrangiano, forma differenziale

Conservazione della quantità di moto:
- Approccio Lagrangiano, forma differenziale

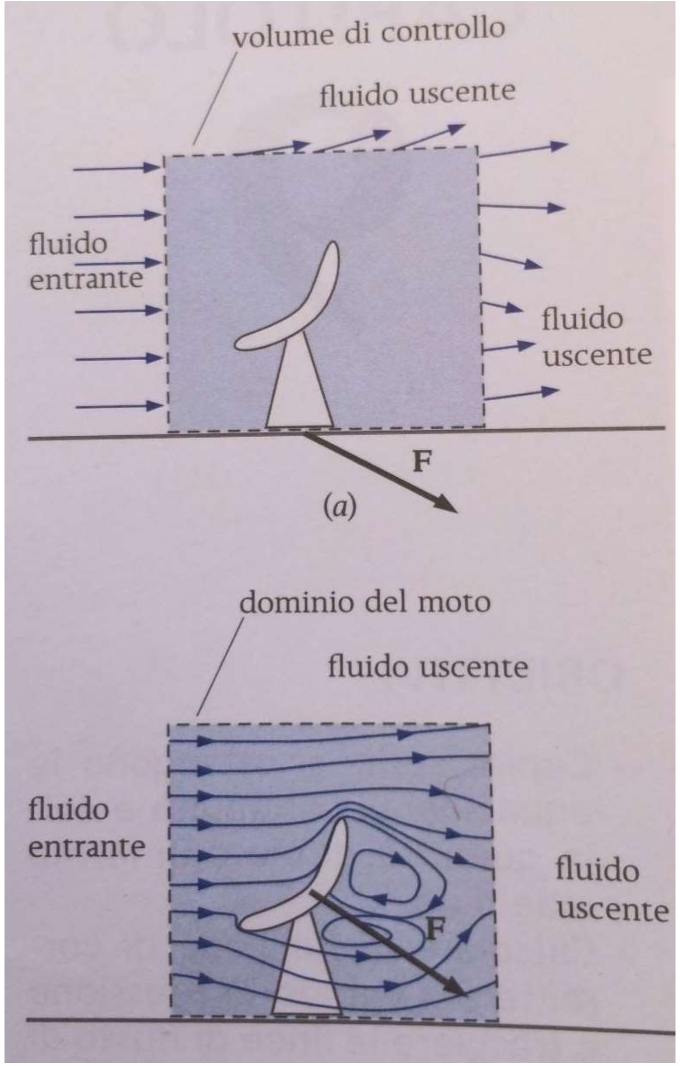
Tensore degli sforzi: parte isotropa e parte deviatorica
Leggi costitutive
Equazioni di Navier-Stokes per fluidi Newtoniani e flussi incomprimibili
Soluzioni analitiche delle equazioni di NS
Funzione di corrente
Forme ridotte delle equazioni di NS
Flussi a potenziale

N.B.: Questo indice NON è esaustivo e NON sostituisce il libro di testo

Alcune immagini sono prese dal libro di testo (Meccanica dei Fluidi, Y.A.Cengek e J.M. Cimbala, Ed. It G. Cozzo e C. Santoro) per scopi didattici

Approccio globale o differenziale?

Abbiamo studiato le leggi di conservazione considerando un approccio globale
Il vantaggio è che si riescono a determinare forze, portata etc., grandezze integrali che caratterizzano il problema



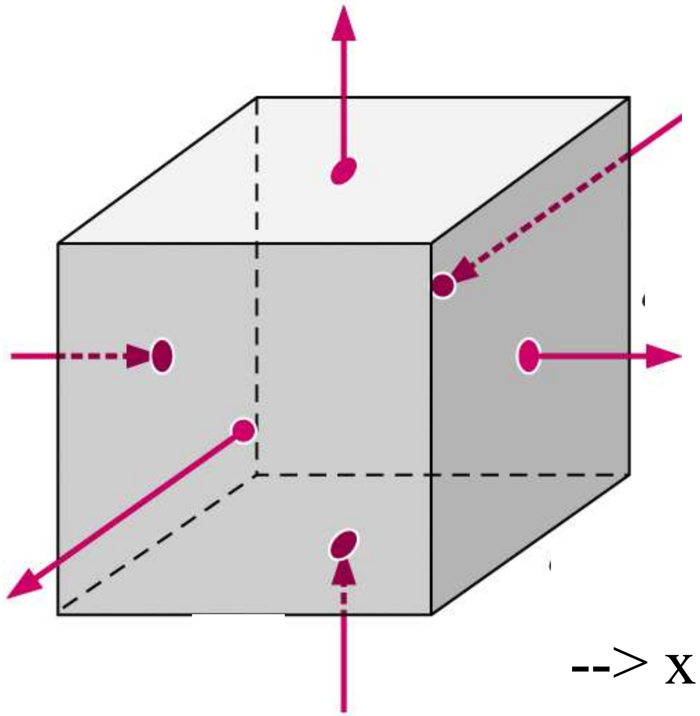
Spesso è importante determinare la distribuzione puntuale della pressione, e della velocità in corrispondenza di un corpo.
E' necessario utilizzare un approccio differenziale

Scriveremo le equazioni in forma differenziale, definite su un volume di fluido
Affinché il problema sia risolvibile:

1) Numero di equazioni uguale al numero di incognite;
2) Noti i valori delle variabili al contorno del dominio e al tempo iniziale

Conservazione della Massa: approccio Euleriano

- Per prima cosa, definiamo un volume di controllo infinitesimo *dx dy dz*
- Poi, approssimiamo la portata massica entrante o uscente da ognuna delle 6 facce usando un'espansione in serie di Taylor intorno al punto centrale per esempio della faccia con normale l'asse x



Si ignorano i termini di ordine superiore a *dx*

$$(\rho u)_{\text{center of right face}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2} + \cancel{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{2}\right)^2} + \dots$$

Equazione indefinita di continuità

il principio di conservazione della massa *applicato ad un volume di controllo comporta un legame fra i caratteri cinematici del processo di moto e la densità del fluido. Questo legame è chiamato* ***EQUAZIONE DI CONTINUITÀ***

⇓

massa entrante - massa uscente = variazione di massa contenuta

forma Indefinita

applicata ad un volume infinitesimo

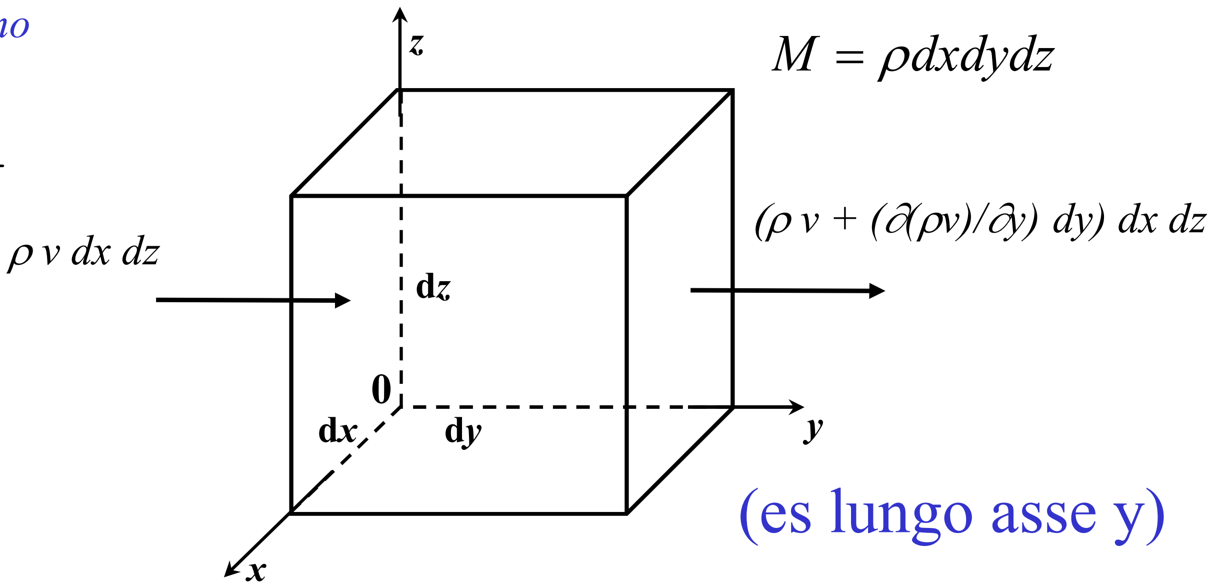
$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x}-\frac{\partial \rho v}{\partial y}-\frac{\partial \rho w}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\left(\rho \overline{V}\right)=0}$$

⇓ ρ = cost.

$$\boxed{div\,\overline{V}=0}$$

$$M = \rho dxdydz$$



(es lungo asse y)

Eq. indefinita di continuità –*Approccio Lagrangiano*

La massa dell'elemento di fluido non varia durante la sua evoluzione spazio-temporale

$$\frac{DM}{Dt} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho W) = W \frac{D}{Dt}(\rho) + \rho \frac{D}{Dt}(W) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{1}{W} \frac{D}{Dt}(W) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Eq. indefinita di continuità
Da forma Euleriana a Lagrangiana

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

Equazione di continuità in forma Euleriana
(detta anche forma conservativa)

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Si svolge la derivata del prodotto…

Si raccolgono i termini…

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Si ottiene l'equazione di continuità
in forma Lagrangiana
(detta anche forma non conservativa)

Equazione di continuità

Riassumendo

forma Indefinita

applicata ad un volume infinitesimo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \overline{V}\right) = 0$$

o (equivalente)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div \, \overline{V} = 0$$

forma Globale

applicata ad un volume finito

$$\int_A \rho \, V_n \, dA = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW$$

applicata ai tubi di flusso

un particolare volume finito

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$$

Se ρ = cost.

$$\boxed{div \, \overline{V} = 0}$$

$$\boxed{Q_e = Q_u}$$

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0}$$

Se moto permanente

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial s} = 0}$$

Bilancio di quantità di moto
formulazione differenziale - riferimento Lagrangiano

1ª equazione cardinale della dinamica:
(volumi finiti e infinitesimi)

$$\sum \overline{Forze} = \overline{a} \cdot m$$

$$\sum \overline{F}_W + \sum \overline{F}_A = \overline{a} \cdot m$$

su volume infinitesimo dW = dx·dy·dz $\Rightarrow$ $\sum d\overline{F}_W + \sum d\overline{F}_A = \overline{a} \cdot dm$

$dm = \rho\, dx \cdot dy \cdot dz$

dF_W = forze di volume = $\rho\, \overline{f}\, dy\, dx\, dz$

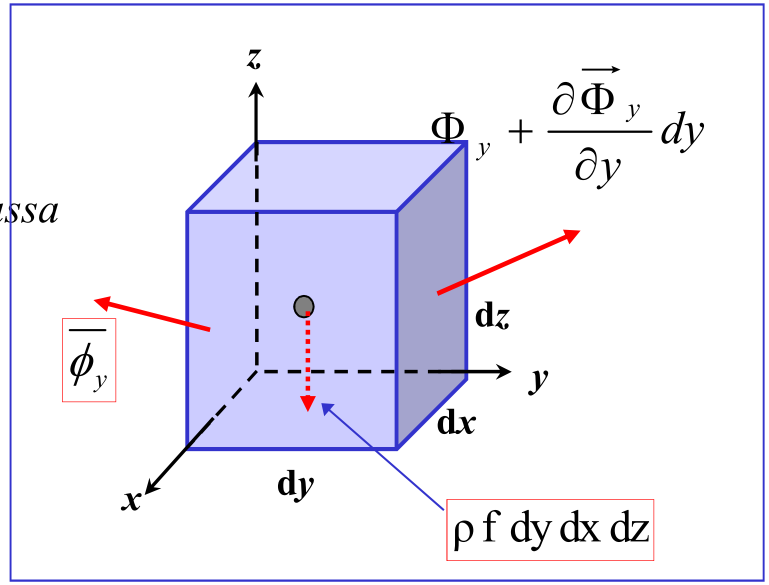
forza di massa per unità di massa

dF_A = forze di superficie dovute alle $\overline{\phi}$ sul contorno =

$$\left[\overline{\Phi}_y + \frac{\partial \overline{\Phi}_y}{\partial y} dy\right] dxdz - \overline{\Phi}_y dxdz +$$

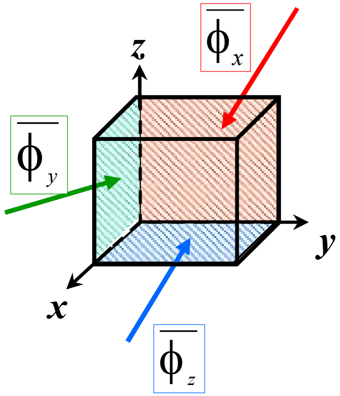
$$\left[\overline{\Phi}_z + \frac{\partial \overline{\Phi}_z}{\partial z} dz\right] dxdy - \overline{\Phi}_z dxdy +$$

$$\left[\overline{\Phi}_x + \frac{\partial \overline{\Phi}_x}{\partial x} dx\right] dydz - \overline{\Phi}_x dydz$$



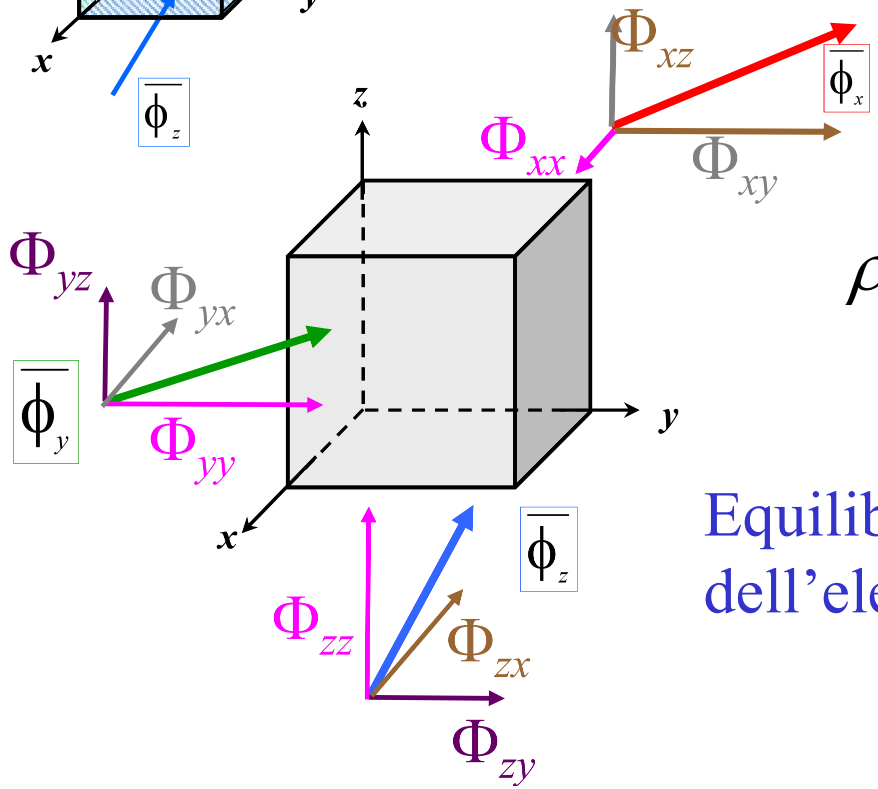
equazione indefinita di equilibrio dinamico

Approccio Lagrangiano	conservazione della massa (eq. continuità)	bilancio quantità di moto (equilibrio dinamico)
forma indefinita	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot v = 0$	$\rho\left(\overline{a} - \overline{f}\right) = \frac{\partial \overline{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\Phi}_z}{\partial z}$



Tensore degli sforzi

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{zy} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\rho\left(\vec{f} - \frac{D\vec{v}}{Dt}\right) = \nabla \cdot \underline{\underline{\Phi}}$$

Equilibrio alla rotazione dell’elemento di fluido

$$\begin{cases} \Phi_{xy} = \Phi_{yx} \\ \Phi_{xz} = \Phi_{zx} \\ \Phi_{yz} = \Phi_{zy} \end{cases}$$

Il tensore degli sforzi introduce 6 nuove variabili.

In condizioni idrostatiche le equazioni della dinamica devono ridursi alle equazioni dell'idrostatica.

Quindi gli sforzi normali possono essere considerati come la composizione di:

- **sforzi di pressione**
- **sforzi superficiali dovuti alla viscosità**

In idrostatica abbiamo visto che la pressione è una quantità isotropa, non dipende cioè dall'orientazione della superficie. Allora:

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{zy} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}^{parte\ isotropa} + \overbrace{\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}}^{parte\ deviatorica}$$

$$\Phi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

Legame tra tensore sforzi normali e pressione:

$$\Phi_{ii} = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = -3p$$

Segue che:

$$p = -\frac{1}{3}\left(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}\right)$$

Le azioni idrodinamiche, oltre a variare la pressione in un punto (si veda il teorema di Bernoulli), producono sforzi normali legati alla viscosità, la somma dei quali è nulla

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0$$

<u>Il problema si sposta adesso alla valutazione del tensore τ_{ij}</u>

IL LEGAME COSTITUTIVO

L'introduzione del tensore degli sforzi ci ha permesso lo sviluppo della parte dinamica del sistema

Avevamo anche introdotto il tensore velocità di deformazione che, insieme al tensore di velocità di rotazione definiscono la velocità relativa tra due punti nello spazio e, quindi, la parte cinematica del problema.

Domanda: Come risponde il sistema ad una sollecitazione esterna?

Qual'è la risposta in termini di velocità-spostamenti sotto l'azione di forze applicate al sistema?

Necessario un legame tra la parte dinamica e la parte cinematica

Questo legame si chiama LEGAME COSTITUTIVO e dipende dalle caratteristiche del fluido

LEGGI COSTITUTIVE

Considerate le proprietà del tensore deviatorico e del tensore di velocità di deformazione (simmetria) è possibile cercare un legame tra i due tensori

$$\tau_{ij} \Leftrightarrow S_{ij}$$

Basato sulle caratteristiche REOLOGICHE dei materiali

Un fluido si dice Newtoniano se il legame è lineare.

Se un fluido Newtoniano si trova in condizioni di flusso incomprimibile:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij}$$

dove μ è la viscosità dinamica misurata in Pa s

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il legame

$$\tau_{ij} \Leftrightarrow S_{ij}$$

si traduce in un legame tra sforzi e velocità e quindi riduce il numero di variabili del problema

Espressione finale che esprime il legame tra il tensore degli sforzi la pressione e le componenti di velocità

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial x_j}$$

Equazioni di Cauchy valide per qualunque tipo di legame costitutivo

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[- p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}\right]$$

Equazioni di Navier-Stokes valide Per fluidi Newtoniani in regime incomprimibile

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \cancel{\mu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}$$

Equazioni di Navier-Stokes in forma finale

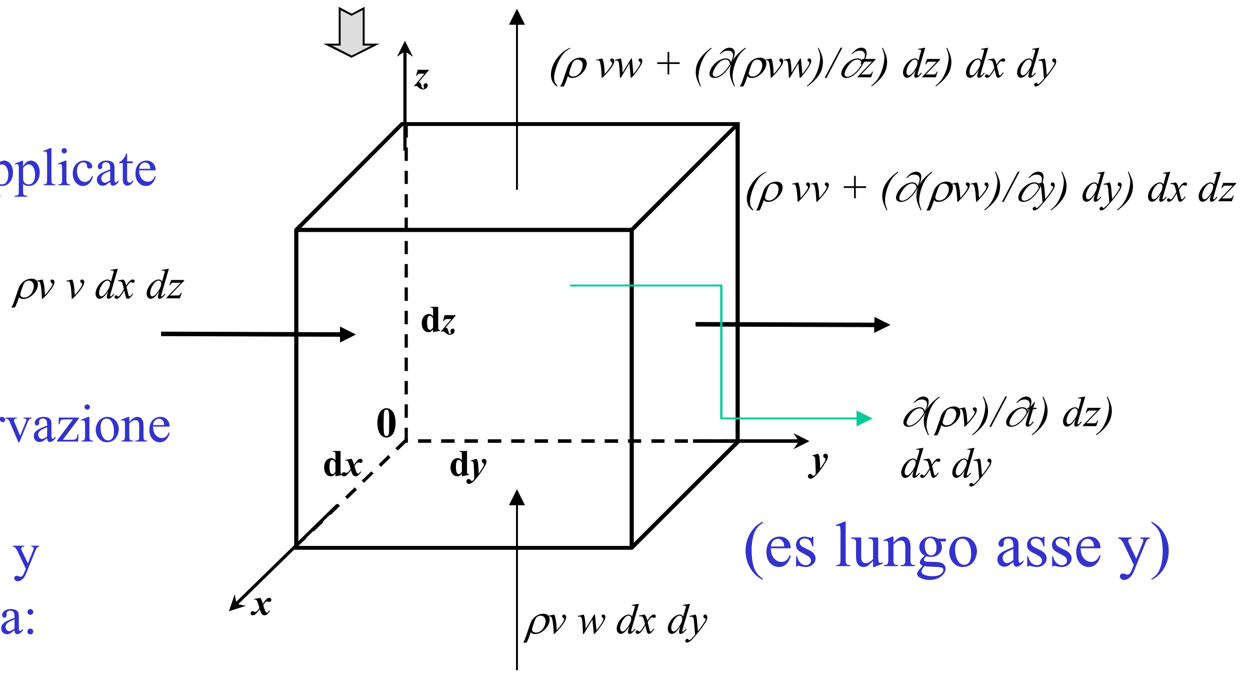
Equazione indefinita della quantità di moto: Approccio Euleriano

La variazione di quantità di moto *su un volume di controllo nell'unità di tempo è pari alla somma delle forze di massa e superficiali applicate al volume stesso*

Variazione di quantità di moto= variazione nel tempo all'interno del volume+
flussi di quantità di moto attraverso la superficie del volume

I contributi delle forze applicate mantengono la stessa forma.

L'equazione della conservazione della quantità di moto proiettata sulla direzione y assume la seguente forma:



$$\frac{\partial \rho v}{dt}dW + \frac{\partial \rho vu}{dx}dW + \frac{\partial \rho vv}{dy}dW + \frac{\partial \rho vw}{dz}dW = \left[\rho f_y + \frac{\partial \Phi_{j2}}{\partial x_j}\right]dW$$

Se dividiamo per il volumetto elementare dW e estendiamo alla generica componente ‘i’:

$$\frac{\partial \rho u_i}{dt} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{dx_j} = \rho f_i + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial x_j}$$

Questa da luogo alla già nota Equazione di NS, scritta però in forma Euleriana (conservativa)

Da notare che, così come per l’equazione di continuità, si può passare facilmente dalla forma conservativa a quella non conservativa con semplici passaggi:

$$\frac{\partial \rho u_i}{dt} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{dx_j} = \rho \frac{\partial u_i}{dt} + u_i \frac{\partial \rho}{dt} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{dx_j} + u_i \frac{\partial \rho u_j}{dx_j} =$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{dt} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{dx_j} + \cancel{\left[u_i \left(\frac{\partial \rho}{dt} + \frac{\partial \rho u_j}{dx_j} \right) \right]} = \rho \frac{\partial u_i}{dt} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{dx_j} = \rho \frac{Du_i}{Dt}$$

SET DI EQUAZIONI IN FORMA ESTESA

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Equazione di continuità

$$\left.\begin{aligned}
\rho \frac{Du_x}{Dt} &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\
\rho \frac{Du_y}{Dt} &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\
\rho \frac{Du_z}{Dt} &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}\right\}$$

Equazioni di
Navier-Stokes

$$\rho = \text{cost}$$

Equazione di stato

Le equazioni sono definite in un dominio di fluido. Le variabili sono la pressione e le tre componenti di velocità

La soluzione richiede:

- conoscenza delle variabili al tempo t=0 in tutto il dominio compresi i contorni
- conoscenza delle variabili sui contorni per t>0

IL RUOLO DELLA PRESSIONE

Nelle equazioni di NS per fluidi incomprimibili compare il gradiente di pressione e non la funzione p. Infatti, in un flusso incomprimibile la pressione (che non è legata alla temperatura e al volume occupato dal fluido)

NON E' UNA GRANDEZZA TERMODINAMICA

La pressione è definita a meno di una costante e le grandezze rilevanti sono le VARIAZIONI DELLA PRESSIONE, che danno luogo alle spinte etc.

Da notare che nelle lezioni precedenti abbiamo sempre lavorato con le pressioni relative ottenute sottraendo al campo di pressione in un punto, il valore noto in un punto particolare del campo di moto (per esempio la pressione atmosferica sulla superficie libera)

Unico caso in cui abbiamo lavorato con pressioni assolute è il caso della cavitazione, che implica un cambio di fase dovuto ad effetti termodinamici

ESEMPIO 9.8 Determinazione del campo di pressione

Determinare il campo di pressione per il campo di velocità permanente bidimensionale del fluido incomprimibile dell'Esempio 9.5 definito dalla relazione $\mathbf{v} = (ax + b)\,\mathbf{i} + (-ay + cx)\,\mathbf{j}$.

Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** Il fluido è incomprimibile. **3** Il moto è bidimensionale nel piano xy. **4** La gravità non agisce né nella direzione x né nella direzione y.

Analisi Il campo di velocità soddisfa l'equazione di continuità 9.60a perché

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = a - a = 0$$

La componente in direzione y dell'equazione di Navier-Stokes, espressa dalla 9.60c, essendo nullo, per ipotesi, il termine della gravità, nulle le derivate rispetto a z, perché il moto è bidimensionale, nulla la derivata rispetto al tempo, perché il moto è permanente, risulta

$$\rho\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)$$

Essendo

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = c \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -a$$

sono nulle anche le derivate seconde, per cui la 9.60c diventa

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho[c(ax+b) - a(-ay+cx)] = -\rho(bc + a^2 y) \qquad (1)$$

Analogamente, in direzione x vale la 9.60b che diviene

$$\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$$

Essendo

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = a \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

sono nulle anche le derivate seconde, per cui la 9.60b diven

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho[a(ax+b)] = -\rho(ab + a^2 x) \qquad (2)$$

Perché sia fisicamente possibile, il campo di pressione $p(x, y)$ deve essere espresso da una funzione regolare, cioè infinitamente derivabile rispetto a x e a y, in quanto non possono esserci discontinuità in p né nelle sue derivate. Se questa condizione è verificata, l'ordine di derivazione è ininfluente (Figura 9.30). Scrivendo le derivate miste delle equazioni ottenute, si ha

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0$$

per cui la condizione è soddisfatta. Ne consegue che *il campo di velocità assegnato è fisicamente possibile.*

Per il calcolo della $p(x, y)$ l'integrazione parziale della 1 fornisce

$$p(x,y) = -\rho\left(bcy + \frac{1}{2}a^2y^2\right) + g(x) \qquad (3)$$

nella quale, essendo l'integrazione parziale, invece di una costante è stata aggiunta una funzione arbitraria dell'altra variabile x. Derivando la 3 rispetto a x e uguagliando alla 2, si ha

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g'(x) = -\rho(ab + a^2x)$$

dalla quale, integrando, si ottiene

$$g(x) = -\rho\left(abx + \frac{1}{2}a^2x^2\right) + C_1$$

nella quale C_1 è una costante di integrazione arbitraria. Sostituendo nella 3, si ha infine

$$p(x,y) = -\rho\left[x\left(\frac{1}{2}a^2x + ab\right) + y\left(\frac{1}{2}a^2y + bc\right)\right] + C_1$$

Discussione Il campo di pressione ottenuto è definito a meno di una costante arbitraria C_1.

IL RUOLO DELLA PRESSIONE

La pressione compare in forma lineare nelle equazioni di NS

Se considero la pressione come la somma di una componente idrostatica p_s e una idrodinamica p_d che segue dal moto (ricordate Bernoulli?) posso operare la seguente decomposizione:

$$p = p_d + p_s$$

Il gradiente di pressione diventa

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\partial p_d}{\partial x_i} - \frac{\partial p_s}{\partial x_i}$$

Allora se la direzione 3 è verticale verso l'alto, nella equazione della quantità di moto sulla verticale la somma dei termini

$$-\rho g - \frac{\partial p_s}{\partial x_3} = 0$$

E quindi si può omettere il termine gravitazionale, però tenendo in mente che la pressione considerata nelle equazioni di NS è quella idrodinamica che segue dall'interazione con il campo di velocità.

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p_d}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Soluzioni analitiche delle NSE

Le equazioni di NS sono nonlineari e del secondo ordine.

La nonlinearità del termine advettivo rende impossibile la soluzione delle equazioni in forma completa

Esistono soluzioni analitiche per casi semplificati.

In particolare, in alcuni casi è possibile eliminare il termine non lineare e risolvere una forma lineare delle equazioni che prevede il bilancio tra gradienti di pressione e forze viscose:

1) Quando il numero di Reynolds è molto basso Re<1 $$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

2) In flussi paralleli, caratterizzati quindi dalla presenza di un'unica componente di velocità $u(x_i)$ $$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \rho f_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_j}$$

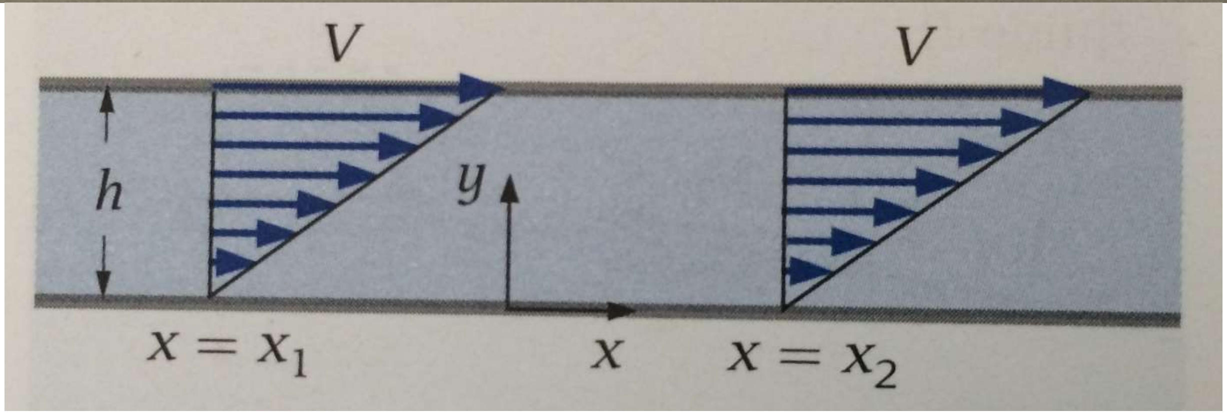
ESEMPIO 9.9 Moto alla Couette

Il moto di un fluido tra due lastre piane parallele indefinite, di cui una ferma e l'altra in moto con velocità V (Figura 9.35), è chiamato moto alla Couette, dal nome del francese Maurice Couette (1858-1943). Si consideri un moto permanente alla Couette di un fluido newtoniano incomprimibile tra due lastre piane, parallele, indefinite, verticali, poste a distanza h. Determinare il campo di velocità e quello di pressione e stimare il valore dello sforzo tangenziale in corrispondenza della parete ferma.

Ipotesi **1** Il moto è bidimensionale nel piano orizzontale xy, da cui $v_z = 0$. **2** Il moto è permanente. **3** La velocità è diretta come l'asse x, da cui $v_y = 0$. **4** Il fluido è incomprimibile e newtoniano, in moto laminare. **5** La pressione p è costante con x.

Analisi Seguendo la procedura indicata in Figura 9.31, si ha

Fase 1 *Definizione del problema e della geometria* (Figura 9.35).



Fase 2 *Posizione delle ipotesi e delle condizioni al contorno.* Sono state elencate le ipotesi. Le condizioni al contorno derivano dalla condizione di aderenza: per $y = 0$, $v_x = v_y = 0$; per $y = h$, $v_x = V$, $v_y = 0$.

Fase 3 *Semplificazione delle equazioni.* Si ha $v_y = 0$ per l'ipotesi 3 e $v_z = 0$ per l'ipotesi 1, per cui l'equazione di continuità 9.60a diviene

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Ne deriva che v_x non è funzione di x. In altre parole, il profilo di velocità è lo stesso per qualunque valore di x (Figura 9.36), cioè il moto è **uniforme**. Per l'ipotesi 1, v_x può essere, quindi, funzione solo di y.

Essendo $\partial v_x/\partial t = 0$ per l'ipotesi 2, $\partial v_x/\partial x = 0$ per la continuità, $v_y = v_z = 0$ per le ipotesi 3 e 1, $g_x = 0$ per l'ipotesi 1, $\partial p/\partial x = 0$ per l'ipotesi 5 e $\partial^2 v_x/\partial x^2 = 0$ per la continuità, l'equazione del moto 9.60b in direzione x

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_x}{\partial x_j} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x_j \partial x_j}$$

Si semplifica nella seguente:

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$$

che implica che il profilo di velocità è indipendente dalla viscosità e dipende solo dalle condizioni al contorno

L'equazione del moto nella direzione verticale diviene:

$$\frac{\partial p_d}{\partial y} = 0$$

Che implica che la velocità non produce variazioni di pressione rispetto al campo idrostatico.

La soluzione dell'equazione per il profilo di velocità è:

$$u_x = C_1 y + C_2$$

La soluzione può essere determinata note le condizioni al contorno.
In particolare $u_x=0$ su $y=0$; $u_x=V$ su $y=h$. Segue che:

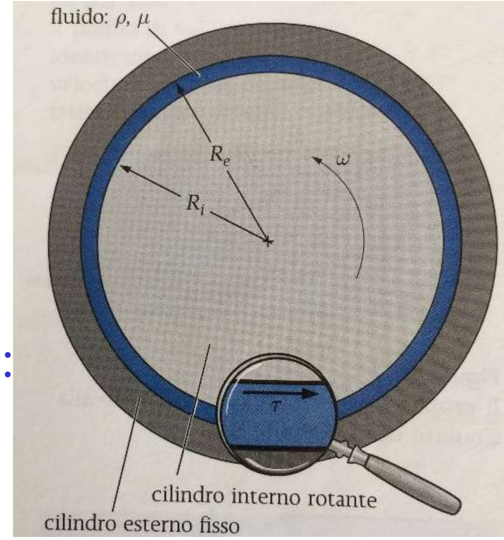
$$u_x = V \frac{y}{h}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \frac{V}{h}$$

Viscosimetro a cilindri coassiali

Il moto di Couette ha importanti implicazioni tecnologiche,
Infatti il viscosimetro a cilindri coassiali è basato sulla soluzione del problema di Couette, per il flusso di intercapedine tra due cilindri coassiali, e considerando le equazioni in coordinate cilindriche . Si ottiene:

$$\tau_{\theta r} = \mu \frac{V}{R_e - R_i} = \mu \frac{\omega R_i}{R_e - R_i}$$



Il momento torcente indotto dal flusso sul cilindro interno sarà:

$$M = \tau_{\theta r} A R_i = \mu \frac{\omega R_i}{R_e - R_i} (2\pi R_i L) R_i$$

Da cui si ricava la viscosità

$$\mu = M \frac{R_e - R_i}{2\pi\omega R_i^3 L}$$

In un apparato sperimentale:

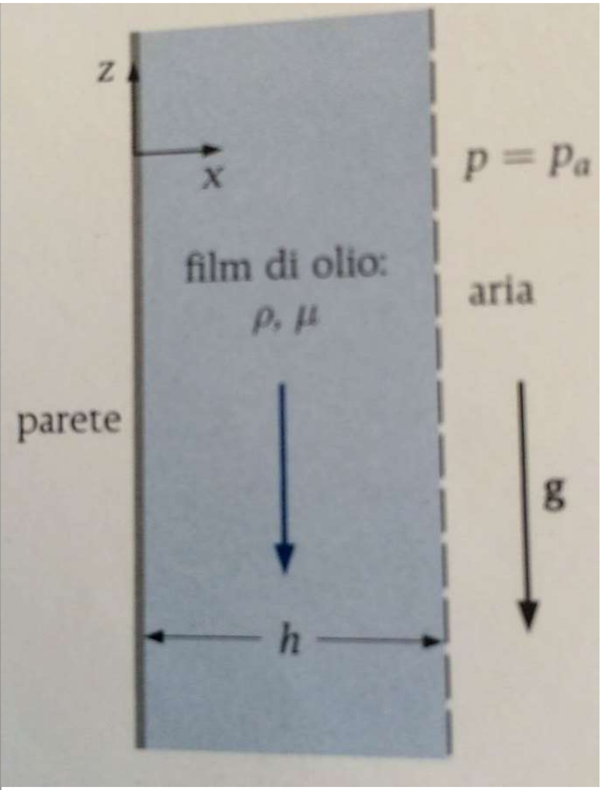
- $R_e - R_i \ll R_i$
- $R_e - R_i \ll L$
- $Re \ll Re_{cr}$

Misurato il momento torcente e la velocità angolare si determina la viscosità

ESEMPIO 9.10 Film di olio che scorre per gravità su una parete verticale

Si consideri il moto laminare, piano e permanente di un film di olio incomprimibile, di spessore h, che scorre per gravità su una parete piana verticale indefinita (Figura 9.40). Determinare il campo di pressione e quello di velocità.

Ipotesi **1** Il moto è bidimensionale nel piano xz, da cui $v_y = 0$. **2** Il moto è permanente. **3** La velocità è diretta ovunque verticalmente, da cui $v_x = 0$. **4** Il fluido è incomprimibile e newtoniano in moto laminare. **5** La pressione sulla superficie libera è uguale alla pressione atmosferica e, essendo costante su ogni piano orizzontale, $p = p_a$ anche in ogni punto del campo.



Analisi Seguendo la procedura indicata in Figura 9.31, si ha

Fase 1 *Definizione del problema e della geometria.* (Figura 9.40).

Fase 2 *Posizione delle ipotesi e delle condizioni al contorno.* Sono state elencate le ipotesi. Le condizioni al contorno sono: per $x = 0$, $v_x = v_y = v_z = 0$; per $x = h$, poiché sulla superficie libera lo sforzo tangenziale è trascurabile, $\partial v_z/\partial x = 0$.

Fase 3 *Scrittura e semplificazione delle equazioni differenziali.* Si ha $v_x = 0$ per l'ipotesi 3 e $v_y = 0$ per l'ipotesi 1, per cui l'equazione di continuità 9.60a diviene

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ne deriva che v_z non è funzione di z. In altre parole, il profilo di velocità è lo stesso per qualunque valore di z, cioè il moto è **uniforme**. Per l'ipotesi 1, v_z può essere, quindi, funzione solo di x.

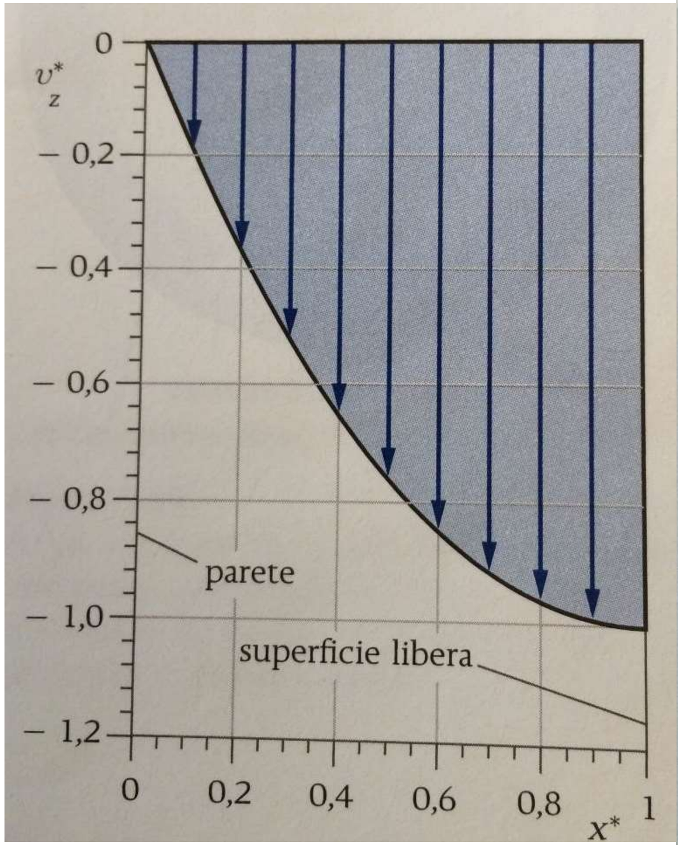
Le equazioni di Navier-Stokes 9.60b e 9.60c nelle direzioni x e y, essendo ovunque $v_x = v_y = 0$ e agendo la gravità solo in direzione z, sono identicamente soddisfatte (tutti i termini sono nulli in entrambe le equazioni).

Essendo $\partial v_z/\partial t = 0$ per l'ipotesi 2, $v_x = v_y = 0$ per le ipotesi 3 e 1, $\partial v_z/\partial z = 0$ per la continuità, $g_z = -g$, $\partial p/\partial z = 0$ per l'ipotesi 5, $\partial^2 v_z/\partial y^2 = \partial^2 v_z/\partial z^2 = 0$ perché v_z è funzione solo di x, l'equazione del moto 9.60d in direzione z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = $$
$$= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

diviene

$$\frac{d^2 v_z}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu}$$



in cui la derivata parziale è diventata una derivata totale perché v_z è funzione della sola x.

Fase 4 *Risoluzione delle equazioni differenziali.* Integrando due volte la 9.60d si ottiene

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2$$

Fase 5 *Applicazione delle condizioni al contorno.* Applicando le condizioni al contorno definite nella fase 2, si ha per $x = 0$

$$v_z = 0 + 0 + C_2 = 0$$

da cui $C_2 = 0$ e per $x = h$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\rho g}{\mu} h + C_1 = 0$$

da cui

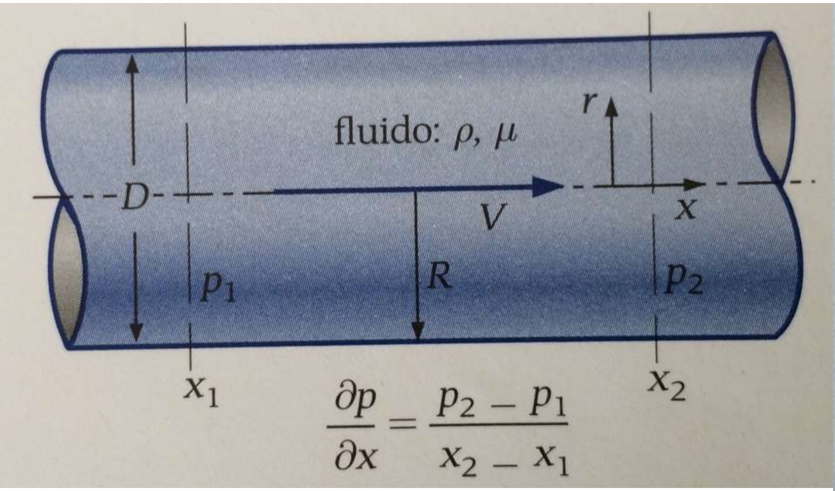
$$C_1 = -\frac{\rho g}{\mu} h$$

Quindi, la legge di distribuzione della velocità è

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g h}{\mu} x = \frac{\rho g}{2\mu} x(x - 2h)$$

Moto laminare in un condotto cilindrico

Nota che la soluzione analitica era stata determinata per mezzo dell'approccio integrale



essendo p_1 e p_2 le pressioni in corrispondenza di due sezioni arbitrarie di ascissa x_1 e x_2. Determinare il campo di velocità e il valore dello sforzo tangenziale alla parete. Si assuma come riferimento un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, x) essendo r la distanza dall'asse lungo il raggio.

Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** La velocità è diretta ovunque come l'asse x, per cui la componente radiale v_r è ovunque nulla. 3 Il fluido è incomprimibile e newtoniano in moto laminare. **4** Nella direzione x è applicato un gradiente di pressione costante, per cu la pressione varia linearmente con x. **5** Il campo di moto è a sim metria assiale per cui la componente $v_\theta = 0$ e tutte le derivate par ziali rispetto a θ sono anch'esse nulle.

Analisi Seguendo la procedura indicata in Figura 9.31, si ha

Fase 1 *Definizione del problema e della geometria.* (Figura 9.42).

Fase 2 *Posizione delle ipotesi e delle condizioni al contorno.* Sono stat elencate le ipotesi. Le condizioni al contorno sono: per $r = R$, $\mathbf{v} =$ per $r = 0$, per la condizione di simmetria la velocità ha un massim per cui $\partial v_x/\partial r = 0$.

Fase 3 *Scrittura e semplificazione delle equazioni differenziali.* Essendo $v_r = 0$ per l'ipotesi 2 e $\partial v_\theta/\partial\theta = 0$ per l'ipotesi 5, l'equazione di continuità 9.61a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

diviene

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Ne deriva che v_x non è funzione di x. In altre parole, il profilo di velocità è lo stesso per qualunque valore di x, cioè il moto è **uniforme**. Per l'ipotesi 1, v_x può essere, quindi, funzione solo di r.

Essendo $\partial v_x/\partial t = 0$ per l'ipotesi 1, $v_r = v_\theta = 0$ per le ipotesi 2 e 5, $\partial v_x/\partial x = 0$ per la continuità, $g_x = 0$, $\partial^2 v_x/\partial\theta^2 = \partial^2 v_x/\partial x^2 = 0$ perché v_x è funzione solo di r, l'equazione del moto 9.61d in direzione x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_x}{\partial\theta} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right]$$

diviene

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

in cui la derivata parziale di v_x è diventata una derivata totale pe ché v_x è funzione della sola r. Analogamente, essendo tutti i termi nulli tranne il gradiente di pressione, la 9.61b secondo r diviene

$$\frac{\partial p}{\partial r}=0$$

cioè p non è funzione di r. Pertanto p può essere solo funzione di per cui nella 9.61d anche la derivata parziale di p può essere sos tuita con una derivata totale.

Fase 4 *Risoluzione delle equazioni differenziali.* Integrando la 9.61c ottiene

$$r\frac{dv_x}{dr}=\frac{r^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}+C_1$$

in cui C_1 è una costante di integrazione. Dividendo ambo i mem per r e integrando una seconda volta, si ottiene

$$v_x=\frac{r^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}+C_1\ln r+C_2$$

in cui C_2 è una seconda costante di integrazione.

Fase 5 *Applicazione delle condizioni al contorno.* Per $r = 0$, essendo

$$r\frac{dv_x}{dr} = \frac{r^2}{2\mu}\frac{dp}{dx} + C_1 = 0$$

si ha $C_1 = 0$. Alla parete, per $r = R$, si ha

$$v_x = \frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx} + C_2 = 0$$

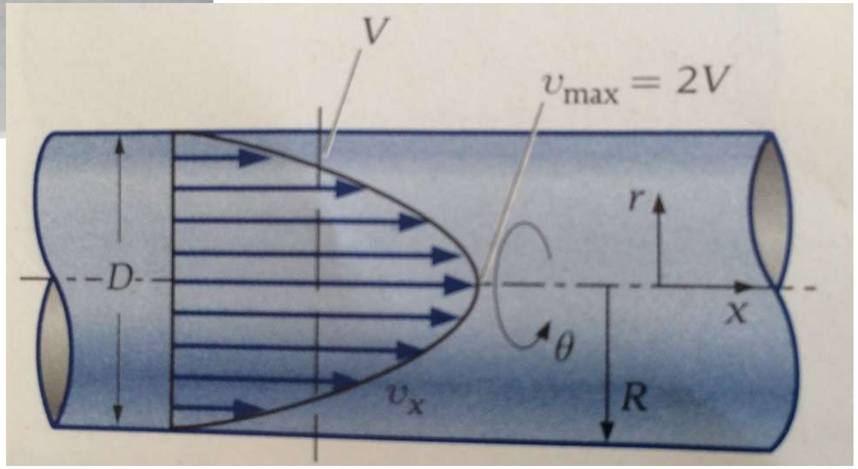
da cui

$$C_2 = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$$

Infine, sostituendo le costanti, si ha

$$v_x = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(R^2 - r^2)$$

Il profilo di velocità è quindi parabolico (Figura 9.43).



Forme semplificate delle NSE: equazione di Eulero

La viscosità dell'acqua e dell'aria sono molto piccole e lontano dalle pareti solide o dalle zone di scia il termine viscoso spesso diventa trascurabile rispetto al termine inerziale.

Ipotizzando quindi un fluido ideale (incomprimibile e non viscoso) le equazioni si riducono alle **equazioni di Eulero** che sono:
NON LINEARI
Del I-ORDINE

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

La riduzione dell'ordine implica una riduzione sulle condizioni al contorno.
La condizione di NO-SLIP diventa quindi ridondante.

Da un punto di vista fisico, in mancanza di sforzi tangenziali NON è richiesto che la velocità tangenziale relativa tra fluido e superficie solida sia nulla.

Forme semplificate delle NSE: equazione di Bernoulli

Importante notare che il termine advettivo può essere espresso mediante la seguente identità:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left[u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{\text{somma su } j \text{ per } j \neq i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{u_j u_j}{2} + u_j \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]_{\text{somma su } j \text{ per } j \neq i} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - u_j \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{\text{somma su } j \text{ per } j \neq i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) - (u \times \omega)_i$$

In condizioni di moto permanente, considerata l'ipotesi di incomprimibilità, dividendo per la densità ρ, l'equazione di Eulero si scrive:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\left(u\times\omega\right)_i=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right)+f_i$$

Se la forza di massa è la forza di gravità, se l'asse verticale è orientato verso l'alto, l'equazione diventa:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\left(u\times\omega\right)_i=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}gx_3$$

e quindi:

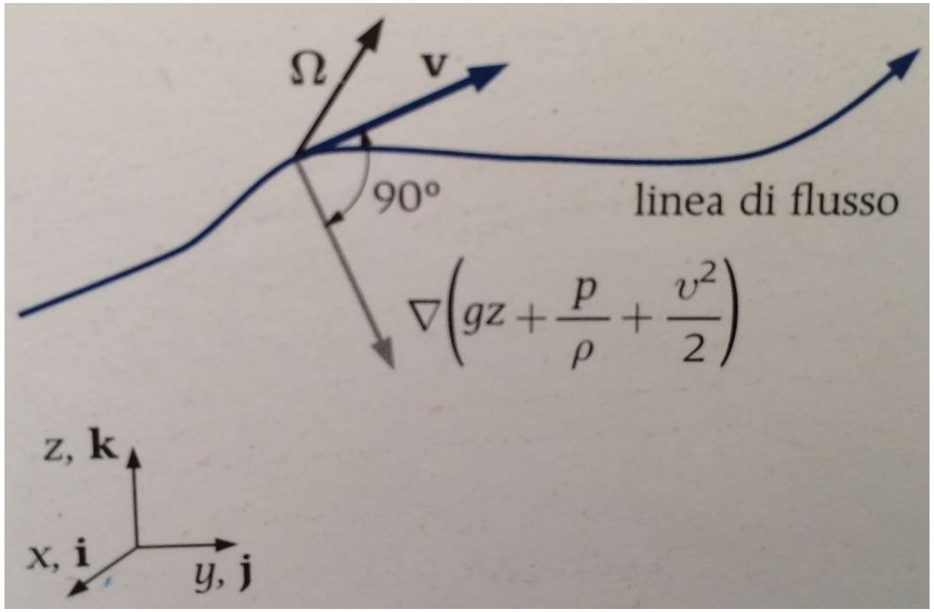
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gx_3\right)=\left(u\times\omega\right)_i$$

Il prodotto vettore a destra dice che il gradiente del trinomio di Bernoulli è ortogonale al vettore velocità

Consideriamo una linea di flusso: per definizione la velocità è parallela alla stessa

Quindi il gradiente del trinomio di Bernoulli è ortogonale alla linea di flusso, punto per punto.

Essendo il gradiente di una funzione, per definizione, ortogonale alla funzione stessa, Segue che il TRINOMIO DI BERNOULLI è COSTANTE SU UNA LINEA DI FLUSSO



$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g = \text{cost}$$

Il valore della costante può variare da linea a linea, se il campo di moto è rotazionale.

Se il campo di moto è irrotazionale allora la somma dei tre termini è costante in tutto il dominio

Forme semplificate delle NSE: fluidi ideali in campi di moto irrotazionale

Supponiamo che il fluido sia ideale e il campo irrotazionale

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$$

Se il rotore di un vettore è nullo, significa che il vettore può essere espresso attraverso il gradiente di una funzione scalare Φ:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \nabla \Phi = 0$$

Tale funzione scalare è chiamata POTENZIALE DI VELOCITA'

$$\vec{v} = \nabla \Phi$$

Le tre componenti di velocità sono esprimibili mediante un'unica funzione scalare

L'equazione di continuità diventa:

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

Funzione di corrente: definizione

A volte può risultare conveniente definire un campo di velocità (generico) attraverso una funzione scalare rappresentativa.

Definiamo funzione di corrente una funzione definita in modo tale da assumere un *valore univoco* su una linea di corrente

Tale funzione può essere costruita sia per un campo rotazionale che irrotazionale. Unica limitazione è che il campo di velocità sia bidimensionale e incomprimibile

Definiamo una funzione Ψ e il suo differenziale totale:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

Vogliamo che Ψ sia costante su una linea di corrente:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0 \quad \text{su} \quad \left(\vec{v} \times \overrightarrow{ds}\right)_k = u_x dy - u_y dx = 0$$

Quindi, deve risultare:

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad , \qquad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Funzione di corrente: proprietà

Permette di rappresentare un campo di velocità bidimensionale mediante un'unica funzione scalare.

La funzione soddisfa l'equazione di continuità per i flussi incomprimibili, infatti:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Il Laplaciano della funzione di corrente è pari all'opposto della vorticità:

$$\left[\nabla \times \vec{v}\right]_k = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \text{da cui segue:}$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega$$

Se il campo di moto è irrotazionale, segue che:

$$\nabla^2 \Psi = 0$$

Esempio 9.4 Calcolo del campo di velocità dalla funzione di corrente

La funzione di corrente di un campo di moto permanente di un fluido incomprimibile nel piano xy è $\psi = ax^3 + by + cx$, con $a = 0{,}50\ (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s})^{-1}$, $b = -2{,}0$ m/s e $c = -1{,}5$ m/s. (*a*) Derivare le espressioni di v_x e v_y. (*b*) Verificare che il campo di velocità soddisfi la continuità. (*c*) Tracciare alcune linee di flusso nel primo quadrante.

Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** Il fluido è incomprimibile. **3** Il moto è bidimensionale nel piano xy e quindi $v_z = 0$ e v_x e v_y non variano con z.
Analisi (*a*) Per le 9.20, differenziando la funzione di corrente, si ha

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = b$$

e

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -3ax^2 - c$$

(*b*) Perché per il moto bidimensionale di un fluido incomprimibile sia soddisfatta la continuità, deve essere soddisfatta la 9.19. Poiché v_x non è funzione di x e v_y non è funzione di y, è nullo ciascuno degli addendi della 9.19, che pertanto risulta soddisfatta. In effetti, essendo ψ regolare rispetto a x e a y, l'equazione di continuità per il moto bidimensionale di un fluido incomprimibile nel piano xy è automaticamente soddisfatta dalla stessa definizione di ψ. Il fluido è dunque incomprimibile.

(*c*) Per tracciare le linee di flusso, si può calcolare y in funzione di x e ψ oppure x in funzione di y e ψ . In questo caso è più immediato il calcolo di y

$$y = \frac{\psi - 3ax^3 - cx}{b}$$

il cui grafico è riportato in Figura 9.12 per diversi valori di ψ e per i valori assegnati di a, b e c.
Discussione Per determinare la direzione del moto, si può calcolare la velocità in un punto generico. Per esempio, nel punto di coordinate $x = 3$ m, $y = 4$ m, si ha $v_x = -2{,}0$ m/s e $v_y = -12{,}0$ m/s. Ciò indica che in questa zona del campo di moto il fluido si muove verso il basso e verso sinistra. La Figura 9.12 riporta il vettore velocità in tale punto e in altri tre punti del campo di moto.

Esempio 9.5 Calcolo della funzione di corrente di un campo di velocità assegnato

Si consideri il campo di moto permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile definito dalle componenti $v_x = ax + b$ e $v_y = -ay + cx$, con $a = 0{,}50\ s^{-1}$, $b = 1{,}5$ m/s e $c = 0{,}35\ s^{-1}$. Derivare un'espressione per la funzione di corrente e tracciare alcune linee di flusso nel primo quadrante.

Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** Il fluido è incomprimibile. **3** Il moto è bidimensionale nel piano xy e quindi $v_z = 0$ e v_x e v_y non variano con z.

Analisi Dalla prima delle 9.20 si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = ax + b$$

Integrando rispetto a y e aggiungendo una funzione arbitraria di x, piuttosto che una costante, visto che l'integrazione è *parziale*, si ottiene

$$\psi = axy + by + g(x)$$

Dalla seconda delle 9.20, si ha

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay - g'(x)$$

in cui $g'(x) = dg/dx$, perché g è funzione della sola variabile x. Eguagliando tale espressione con quella assegnata, si ha

$$v_y = -ay + cx = -ay - g'(x)$$

da cui

$$g'(x) = -cx \qquad \text{e} \qquad g(x) = -c\frac{x^2}{2} + C$$

Sostituendo nell'espressione di ψ, si ottiene infine

$$\psi = axy + by - c\frac{x^2}{2} + C$$

Ponendo per semplicità $C = 0$ ed esplicitando y in funzione di x, si ha

$$y = \frac{\psi + cx^2/2}{ax + b}$$

il cui grafico è riportato in Figura 9.13 per diversi valori di ψ e per i valori assegnati di a, b e c.

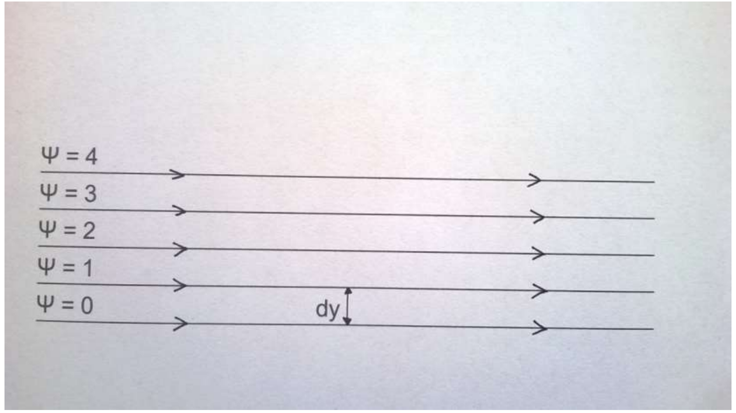
Discussione Quando possibile, è buona norma controllare i calcoli. In questo caso, per esempio, per controllare che i risultati siano corretti, per le 9.20 si può derivare la ψ rispetto a x e a y e verificare che le componenti v_y e v_x così ottenute siano identiche a quelle assegnate.

Funzione di corrente e portata

Consideriamo un fluido incomprimibile bidimensionale. Le linee di flusso coincidono con la traiettoria delle particelle.

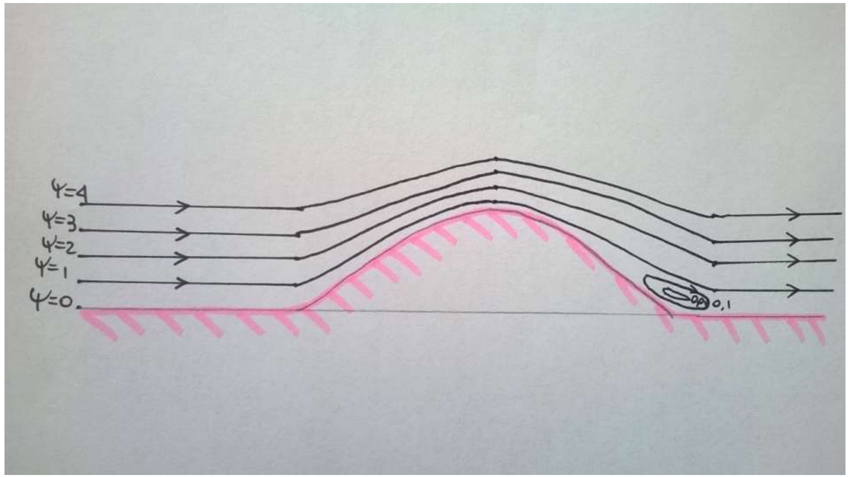
$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Longrightarrow \psi_1 - \psi_0 = u_x dy$$

Tale termine si può considerare come la portata per unità di lunghezza.

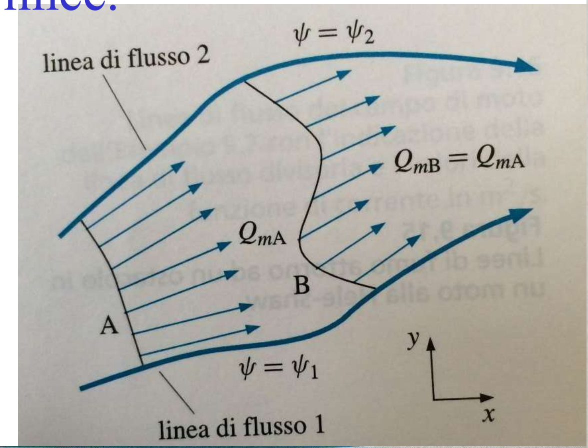


ψ_0 è la condizione a contorno

In presenza di un ostacolo, giacché la portata deve rimanere costante, la velocità delle particelle in prossimità dello stesso aumenta. Le linee di corrente sono quindi ravvicinate nelle zone ad alta velocità



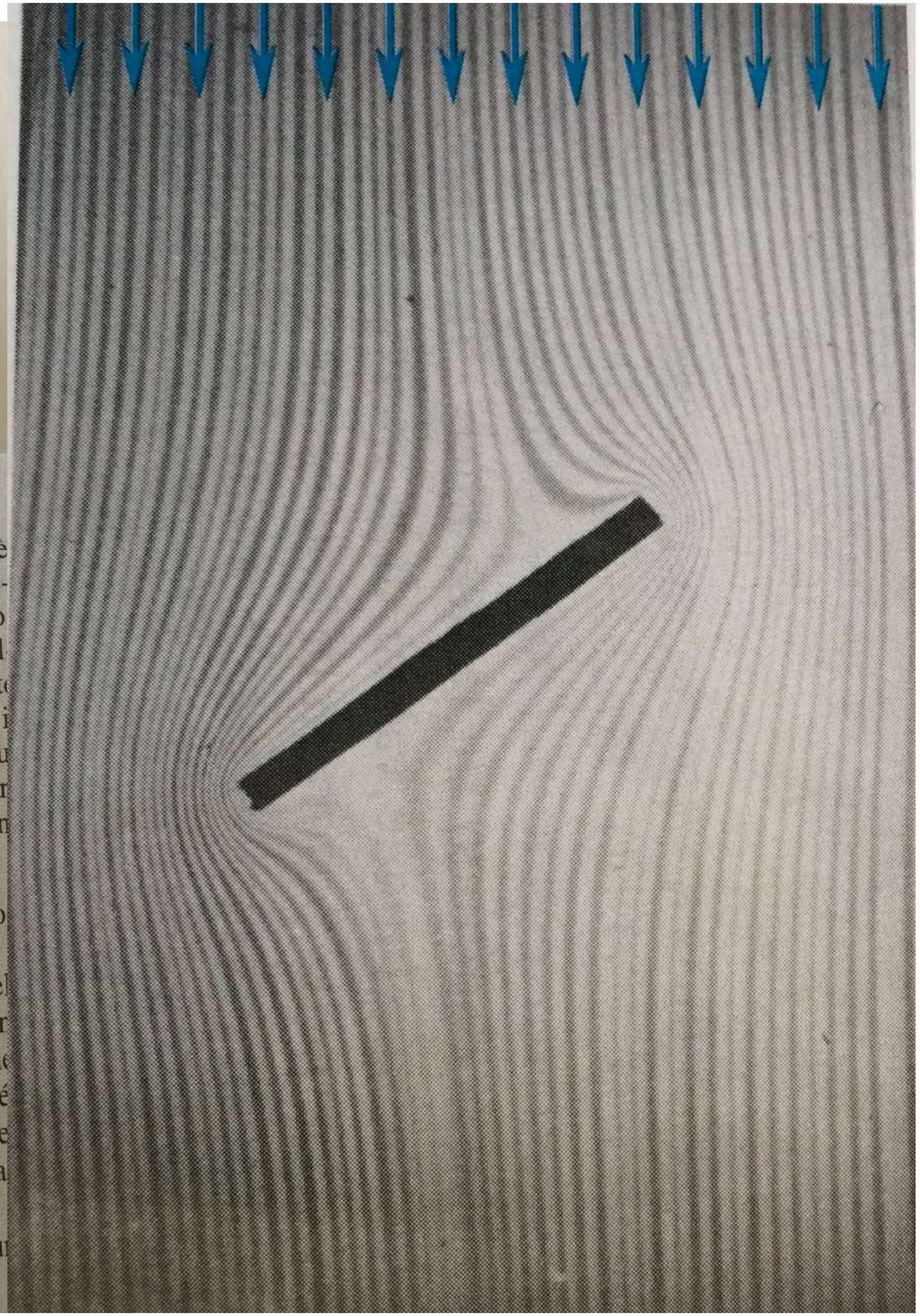
La differenza tra due valori di funzione di corrente Ψ_2-Ψ_1 è uguale alla portata volumetrica tra le linee.



Esempio 9.6 **Stima dell'andamento della velocità dall'esame delle linee di flusso**

Il moto di un liquido tra due lastre piane parallele molto vicine tra di loro è chiamato **moto alla Hele-Shaw**. La Figura 9.15 mostra un moto alla Hele-Shaw attorno a un ostacolo piano inclinato rispetto alla direzione del moto Il fluido è acqua e le lastre di vetro sono a distanza di 1 mm l'una dall'al tra. La linee di fumo visualizzate sono ottenute immettendo del colorant all'ingresso del campo di moto in punti equidistanti tra di loro. Essendo i moto permanente, le linee di fumo coincidono con le linee di flusso. Discu tere come le caratteristiche delle linee di flusso possano consentire di stimar quanto è (relativamente) alta o bassa la velocità del fluido in una certa region del campo di moto.

Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** Il fluido è incomprimibile. **3** Il moto bidimensionale nel piano xy.
Analisi Quando le linee di flusso si allontano l'una dall'altra, la velocità nel regione compresa tra esse diminuisce. Analogamente, se le linee si avvicir no, la velocità aumenta. Osservando la Figura 9.15 si può concludere che monte dell'ostacolo, lontano da esso, il moto è rettilineo e uniforme perché linee di flusso sono equidistanti. Avvicinandosi all'ostacolo il fluido decele specialmente in prossimità del punto di ristagno, come indica l'ampio spa tra le linee di flusso.
Al contrario, in prossimità dei vertici dell'ostacolo, il fluido raggiu velocità molto alte, come indicato dagli spazi ridotti tra le linee.



Esempio 9.7 Determinazione della portata dalle linee di flusso

Sul fondo di un canale a sezione rettangolare, di larghezza $B = 2$ m, è praticata una luce per l'intera larghezza B del canale, dalla quale viene aspirata una portata Q. La velocità media della corrente che defluisce nel canale è $V = 1$ m/s. Il moto è con buona approssimazione bidimensionale nel piano verticale.

La Figura 9.16 riporta alcune linee di flusso. Con spessore maggiore è riportata la **linea di flusso divisoria**, così chiamata perché divide il campo di moto in due parti: il liquido al di sotto di essa viene infatti aspirato nella luce, mentre quello al di sopra di essa continua a muoversi verso valle. Determinare la portata aspirata attraverso la luce e stimare il valore della velocità nel punto A.

Ipotesi **1** Il moto è permanente. **2** Il fluido è incomprimibile. **3** Il moto è bidimensionale nel piano verticale xy. **4** La resistenza offerta dal fondo del canale è trascurabile.

Analisi La portata per unità di larghezza tra il fondo ($\psi_0 = 0$) e la linea di flusso divisoria ($\psi_1 = 1{,}0\ \mathrm{m^2/s}$) vale

$$\frac{Q}{B} = \psi_1 - \psi_0 = 1{,}0 - 0 = 1{,}0\ \mathrm{m^2/s}$$

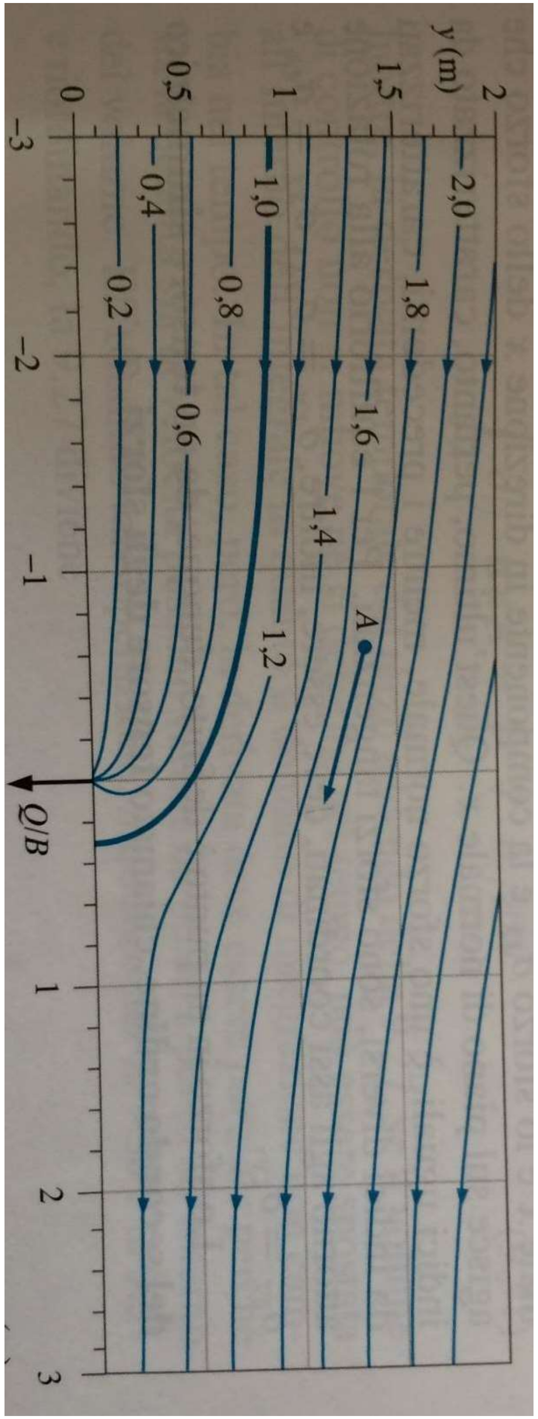
per cui la portata aspirata dalla luce è

$$Q = \frac{Q}{B}B = 1{,}0 \times 2 = 2{,}0\ \mathrm{m^3/s}$$

Per stimare il valore della velocità nel punto A, si misura la distanza d tra le linee di flusso $\psi_2 = 1{,}6\ \mathrm{m^2/s}$ e $\psi_3 = 1{,}8\ \mathrm{m^2/s}$ tra le quali si trova il punto. In prossimità del punto A è $d = 0{,}21$ m circa. La portata per unità di larghezza tra queste due linee di flusso è $\Delta Q/B = \psi_3 - \psi_2 = 0{,}2\ \mathrm{m^2/s}$. Essendo $\Delta Q = VBd$, la velocità in A può essere stimata come

$$v_A \cong \frac{\Delta Q}{Bd} = \frac{0{,}20}{0{,}21} = 0{,}95\ \mathrm{m/s}$$

valore in buon accordo col valore noto della velocità media (1,0 m/s).



Equazioni che governano il campo di moto irrotazionale (formulazione a potenziale)

Equazione valida nel volume di fluido

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Condizioni al contorno su superfici aperte e su corpi solidi

$$v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_0, 0$$

Il set di equazioni (LINEARE!) mi permette di determinare il campo di velocità

L'equazione di conservazione della quantità di moto diventa il trinomio di Bernoulli da cui Determino il campo di pressioni

$$\frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g x_3 = \text{cost}$$

La costante, per esempio, può essere calcolata alla sezione di ingresso del dominio

$$\text{cost} = \frac{U_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g z_0$$

Le superfici equipotenziale sono ortogonali alle linee di corrente

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \Psi = 0$$

Formulazione a potenziale:

Vantaggi

- Equazione lineare in Φ. Vale il principio di sovrapposizione: Se Φ_1 e Φ_2 sono due potenziali rappresentativi di due campi di velocità v_1 e v_2, il potenziale $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ è rappresentativo di un campo di velocità $v = v_1 + v_2$
- Velocità e pressione non sono mutuamente accoppiati. Determinata la velocità, può essere determinato, successivamente, il campo di pressione

Svantaggi

- Non rappresentativo di campi di moto che si sviluppano vicino alle pareti solide (strato limite) o a valle di corpi tozzi (scie) dove il campo di moto è fortemente rotazionale
- Il calcolo della resistenza al moto di un corpo fornisce sempre un valore nullo (Paradosso di D'Alambert)