

Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

per l'edizione italiana

Giuseppe Cozzo
Cinzia Santoro

Meccanica dei fluidi



Seconda edizione

Soluzione dei problemi
Capitolo 9

McGraw-Hill

Indice

1	Introduzione e concetti di base	1
	Introduzione, classificazione e sistema	1
	Massa, forza e unità di misura	4
	Modellazione e risoluzione di problemi ingegneristici	7
	Riepilogo	9
2	Proprietà dei fluidi	11
	Densità	12
	Tensione di vapore e cavitazione	15
	Energia specifica	16
	Comprimibilità e velocità del suono	17
	Viscosità	24
	Tensione superficiale e capillarità	30
	Riepilogo	32
3	Statica dei fluidi	37
	Pressione, manometro e barometro	38
	Spinte idrostatiche su superfici piane e curve	59
	Galleggiamento	66
	Moto rigido dei fluidi	72
	Riepilogo	81
4	Cinematica dei fluidi	99
	Problemi introduttivi	99
	Descrizioni lagrangiana ed euleriana	101
	Strutture del moto e visualizzazione del moto	107
	Moto e deformazione di elementi di fluido	115
	Teorema del trasporto di Reynolds	126
	Riepilogo	127
5	Equazioni della massa, di Bernoulli, dell'energia	135
	Conservazione della massa	136
	Energia meccanica e rendimento	140
	Teorema di Bernoulli	145
	Equazione dell'energia	160
	Riepilogo	174

6	Equazione della quantità di moto	183
	Leggi di Newton e conservazione della quantità di moto	184
	Equazione della quantità di moto	184
	Riepilogo	218
7	Analisi dimensionale e modellazione	229
	Dimensioni e unità, dimensioni fondamentali	229
	Omogeneità dimensionale	232
	Adimensionalizzazione delle equazioni	233
	Analisi dimensionale e similitudine	234
	Parametri adimensionali e metodo delle variabili ripetute	238
	Prove sperimentali e similitudine incompleta	255
	Riepilogo	260
8	Correnti in pressione	275
	Moto laminare e moto turbolento	276
	Moto completamente sviluppato	279
	Perdite localizzate	298
	Reti di distribuzione	299
	Lunghe condotte	326
	Misura della velocità e della portata	336
	Riepilogo	343
9	Equazioni indefinite del moto dei fluidi	357
	Problemi di base	357
	Equazione di continuità	359
	Funzione di corrente	361
	Equazione della quantità di moto e condizioni al contorno	371
	Riepilogo	379
10	Soluzioni approssimate dell'equazione di Navier-Stokes	391
	Problemi di base	392
	Moto non viscoso	395
	Moto irrotazionale	396
	Strati limite	400
	Riepilogo	409
11	Moto attorno ai corpi: resistenza e portanza	411
	Resistenza e portanza	412
	Moto su lastra piana	424
	Moto attorno a cilindri e sfere	428
	Portanza	432
	Riepilogo	436
12	Moto dei fluidi comprimibili	441
	Grandezze di ristagno	442
	Moto isoentropico unidimensionale	445
	Moto isoentropico negli ugelli	448
	Onde d'urto e onde di espansione	452

Moto con scambio di calore e resistenze trascurabili (Flusso di Rayleigh)	460
Moto adiabatico con resistenze non trascurabili (Flus- so di Fanno)	467
Riepilogo	476
13 Correnti a superficie libera	495
Numero di Froude e celerità	497
Energia specifica ed equazione dell'energia	502
Moto uniforme e sezioni di minimo costo	509
Moto gradualmente e rapidamente variato. Risalto idraulico	520
Regolazione e misura della portata	527
Riepilogo	534

EQUAZIONI INDEFINITE DEL MOTO DEI FLUIDI

9

SOMMARIO

Le equazioni che esprimono la legge di conservazione della massa (*equazione di continuità*) e la seconda legge di Newton (*equazione della quantità di moto*) in forma indefinita, cioè valida per ogni punto del campo di moto, sono, rispettivamente,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (9.6)$$

e

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij} \quad (9.47)$$

in cui σ_{ij} è il tensore degli sforzi.

Nel moto bidimensionale di un fluido incompressibile, si può definire una funzione ψ , detta *funzione di corrente*, tale che

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.20)$$

Curve a ψ costante sono linee di flusso del campo di moto. La differenza tra i valori che ψ assume in corrispondenza di due linee di flusso è uguale alla portata per unità di larghezza tra le due linee di flusso.

L'equazione della quantità di moto scritta in forma scalare, associata all'equazione di continuità, costituisce un sistema di 4 equazioni in 10 incognite (la densità, le 3 componenti della velocità e le 6 del tensore degli sforzi).

Per rendere determinato il problema, è necessario introdurre ulteriori relazioni tra gli sforzi e le componenti della velocità, dette *equazioni costitutive*. Per i fluidi incompressibili newtoniani si perviene, così, alla *equazione di Navier-Stokes*

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (9.59)$$

che, associata all'equazione di continuità, che per un fluido incompressibile si semplifica nella

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (9.18)$$

costituisce un sistema di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. Tale sistema ammette soluzione analitica solo per campi di moto dalla geometria semplice e in regime di moto laminare. Vengono riportati alcuni esempi in cui, assegnato il campo di velocità, si determina l'espressione del campo di pressione, o in cui, note le condizioni al contorno, si determina il campo di velocità e di pressione per un campo di moto di geometria assegnata.

Nei casi di moto turbolento o di geometrie più complicate, tranne qualche caso in cui è possibile pervenire a soluzioni approssimate, è necessario l'impiego di tecniche di integrazione numerica.

PROBLEMI

Problemi di base

9.1 Qual è la differenza tra *dominio del moto* e *volume di controllo*?

Analisi Quando si è interessati alle caratteristiche globali del moto, come, ad esempio, la portata che attraversa la superficie di contorno di un volume, è sufficiente prendere in considerazione una regione dello spazio chiamata *volume di controllo*. Nell'analisi di un volume di controllo, l'interno del volume è trattato come una “scatola nera” per cui *non è possibile* (né necessario) conoscere i valori che grandezze caratteristiche del moto, come la pressione o la velocità, assumono in punti *interni*. Nell'*analisi differenziale* di un problema di moto, invece, le equazioni del moto dei fluidi vengono applicate a *qualsunque* punto ed in *ciascun* punto nel campo di moto all'interno di una regione chiamata *dominio del moto*.

9.2 Quando due o più equazioni differenziali sono accoppiate?

Analisi Due o più equazioni differenziali sono *accoppiate* quando le incognite compaiono in più equazioni, per cui non è possibile risolverle separatamente.

9.3 In un problema di moto vario tridimensionale di un fluido incomprimibile e isoterma, quante sono le incognite? Quali sono le equazioni che consentono di risolvere il problema?

Analisi Le incognite sono quattro (le tre componenti della velocità v_x , v_y e v_z e la pressione p) legate da *quattro equazioni* (una esprime la conservazione della massa e tre equazioni scalari esprimono la seconda legge di Newton, che è una relazione vettoriale).

9.4 Enunciare il teorema della divergenza.

Analisi Il teorema della divergenza dice che l'integrale, esteso ad un volume W , della divergenza di un vettore è uguale all'integrale, esteso alla superficie A di contorno di W , della componente del vettore localmente normale ad A . Dato un vettore $\mathbf{G}$ e la sua divergenza $\nabla \cdot \mathbf{G}$, il teorema della divergenza (o teorema di Gauss) può essere scritto come

$$\int_W \nabla \cdot \mathbf{G} dW = \oint_A \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dA$$

9.5 Calcolare la divergenza del vettore

$$\mathbf{G} = 2xz \mathbf{i} - \frac{1}{2}x^2 \mathbf{j} - z^2 \mathbf{k}$$

e spiegare il significato del risultato.

Analisi L'operatore divergenza $\nabla \cdot \mathbf{G}$ di un vettore fornisce la somma delle derivate parziali di ciascuna componente del vettore rispetto alla direzione corrispondente, cioè

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{G} &= \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right) = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z}(-z^2) \right] = 2z - 2z = 0 \end{aligned}$$

Se il vettore $\mathbf{G}$ fosse il vettore velocità, per la 9.18 il fluido sarebbe incompressibile.

Equazione di continuità

9.6 Scrivere l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

in coordinate cartesiane nella forma più esplicita possibile.

Analisi In coordinate cartesiane, l'operatore divergenza è

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

per cui, essendo

$$\rho \mathbf{v} = \rho v_x \mathbf{i} + \rho v_y \mathbf{j} + \rho v_z \mathbf{k}$$

esplicitando il prodotto scalare, l'equazione di continuità diviene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

o ancora

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

Quest'ultima, introducendo la derivata totale e l'operatore divergenza, per la 4.12 si può scrivere anche nella forma più sintetica

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

9.7 In un moto permanente tridimensionale, il campo di velocità è definito dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (axy^2 - b) \mathbf{i} + cy^3 \mathbf{j} + dxy \mathbf{k}$$

con a, b, c e d costanti. In quali condizioni il fluido si comporta come incompressibile?

Analisi Perché il fluido si comporti come incompressibile, il campo di velocità deve soddisfare la 9.18

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

per cui

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = ay^2 + 3cy^2 = 0$$

Conseguentemente, perché il fluido si comporti come incompressibile deve essere soddisfatta la condizione

$$a = -3c$$

9.8 In un moto permanente bidimensionale di un fluido incompressibile, la componente della velocità secondo x è $v_x = ax + b$, con a e b costanti. Scrivere un'espressione per la componente v_y .

Analisi Poiché il moto è permanente e il fluido è incompressibile, è valida la 9.18, per cui, in coordinate cartesiane, essendo il moto bidimensionale, deve essere

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Essendo

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = a$$

è anche

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -a$$

e, integrando rispetto a y

$$v_y = -ay + f(x)$$

nella quale, trattandosi di una integrazione parziale, al posto della costante di integrazione, appare una funzione di x .

Discussione Qualunque funzione di x fornisce una v_y che soddisfa la 9.18, poiché in tale equazione la v_y appare derivata solo rispetto a y .

9.9 In un moto permanente bidimensionale di un fluido incompressibile, la componente della velocità secondo x è $v_x = ax^2 - bxy$, con a e b costanti. Scrivere un'espressione per la componente v_y .

Analisi Poiché il moto è permanente e il fluido è incompressibile, è valida la 9.18, per cui, in coordinate cartesiane, essendo il moto bidimensionale, deve essere

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Essendo

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2ax - by$$

è anche

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -2ax + by$$

e, integrando rispetto a y

$$v_y = -2axy + \frac{by^2}{2} + f(x)$$

nella quale, trattandosi di una integrazione parziale, al posto della costante di integrazione, appare una funzione di x .

Discussione Qualunque funzione di x fornisce una v_y che soddisfa la 9.18, poiché in tale equazione la v_y appare derivata solo rispetto a y .

9.10 In un moto permanente tridimensionale di un fluido incompressibile, la componente della velocità secondo x è $v_x = ax + bxy + cy^2$ e quella secondo

y è $v_y = axz - byz^2$, con a, b e c costanti. Scrivere un'espressione per la componente v_z .

Analisi Poiché il moto è permanente e il fluido è incomprimibile, è valida la 9.18, per cui, in coordinate cartesiane, deve essere

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Essendo

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = a + by$$

e

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -bz^2$$

è anche

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -a - by + bz^2$$

e, integrando rispetto a z

$$v_z = -(a + by)z + \frac{bz^3}{3} + f(x, y)$$

nella quale, trattandosi di una integrazione parziale, al posto della costante di integrazione, appare una funzione di x e y .

Discussione Qualunque funzione di x e y fornisce una v_z che soddisfa la 9.18, poiché in tale equazione la v_z appare derivata solo rispetto a z .

Funzione di corrente

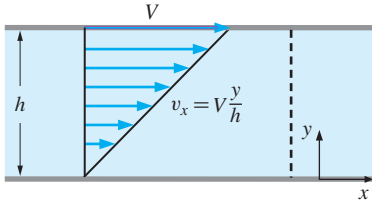
9.11 Cosa rappresentano le curve su cui la funzione di corrente è costante? Qual è la loro utilità?

Analisi Le curve su cui la funzione di corrente è costante rappresentano linee di flusso del campo di moto. Esse permettono dunque di visualizzare il campo di velocità istantaneo.

9.12 In un moto bidimensionale, a che cosa è uguale la differenza tra i valori che la funzione di corrente assume su due linee di flusso?

Analisi In un moto bidimensionale, la differenza tra i valori che la funzione di corrente assume in due linee di flusso è uguale alla portata per unità di larghezza tra le due linee di flusso.

9.13 Si consideri il moto permanente bidimensionale, nel piano xy , di un fluido incomprimibile tra due lastre piane parallele indefinite, a distanza h , di cui quella superiore in moto con velocità V e quella inferiore in quiete (*moto alla Couette*). Il campo di velocità è espresso dalla $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (Vy/h)\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$. Scrivere un'espressione per la funzione di corrente lungo la linea verticale



tratteggiata in figura, ponendo, per semplicità, $\psi = 0$ in corrispondenza della lastra inferiore. Quanto vale ψ in corrispondenza del piano superiore?

Analisi Dalla prima delle 9.20 si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = V \frac{y}{h}$$

Integrando rispetto a y e aggiungendo una funzione arbitraria di x , piuttosto che una costante, visto che l'integrazione è parziale, si ottiene

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2 + g(x)$$

Per la seconda delle 9.20, deve essere

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -g'(x)$$

in cui $g'(x) = dg/dx$, perché g è funzione della sola variabile x . Eguagliando tale espressione con quella assegnata ($v_y = 0$), si ha

$$g'(x) = 0$$

da cui

$$g(x) = \text{costante} = C$$

Sostituendo nell'espressione di ψ , si ottiene infine

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2 + C$$

Imponendo che sia $\psi = 0$ in corrispondenza della lastra inferiore, cioè per $y = 0$, si ha

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2 + C = 0 + C = 0$$

da cui $C = 0$, per cui l'espressione finale di ψ è

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2$$

Essendo tale espressione indipendente da x , essa è valida non solo lungo la linea verticale tratteggiata in figura, ma lungo qualunque altra verticale in tutto il campo di moto. Infatti, anche il campo di velocità assegnato è indipendente da x , perché il moto è completamente sviluppato. Il valore ψ_s che la funzione di corrente assume in corrispondenza della lastra superiore, cioè per $y = h$, è

$$\psi_s = \frac{V}{2h} h^2 = V \frac{h}{2}$$

9.14 Con riferimento al problema precedente, calcolare la portata tra le due lastre, per unità di profondità, integrando il campo di velocità e confrontare il risultato con quello ottenibile direttamente dai valori della funzione di corrente.

Analisi Integrando il campo di velocità, con riferimento ad una profondità unitaria, la portata risulta

$$Q = \int_A v dA = \int_0^h v_x dy = \int_0^h \frac{V}{h} y dy = \frac{V}{2h} [y^2]_0^h = V \frac{h}{2}$$

Dai valori della funzione di corrente, indicando con ψ_s e ψ_i i valori che la funzione di corrente assume, rispettivamente, in corrispondenza della lastra superiore e di quella inferiore, si ha direttamente

$$Q = \psi_s - \psi_i = V \frac{h}{2} - 0 = V \frac{h}{2}$$

risultato coincidente col precedente.

9.15 Con riferimento al moto alla Couette del problema 9.13, per il caso in cui è $V = 3 \text{ m/s}$ e $h = 3 \text{ cm}$, disegnare alcune linee di flusso per valori della funzione di corrente a differenza costante. Queste linee di flusso risultano equidistanti? Perché?

Analisi Dalla

$$\psi = \frac{V}{2h} y^2$$

si ha

$$y = \sqrt{\frac{2h}{V} \psi}$$

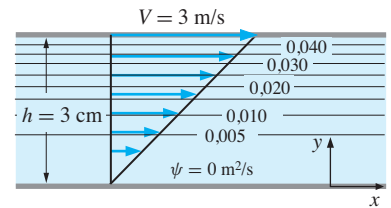
Con i valori assegnati, in corrispondenza della lastra superiore la funzione di corrente assume il valore

$$\psi_s = V \frac{h}{2} = \frac{3 \times 0,03}{2} = 0,045 \text{ m}^2/\text{s}$$

mentre in corrispondenza della lastra inferiore assume il valore $\psi_i = 0$. Dividendo la differenza tra i due valori in 9 intervalli uguali, è possibile tracciare le 10 linee di flusso aventi valori della funzione di corrente corrispondenti alla differenza costante

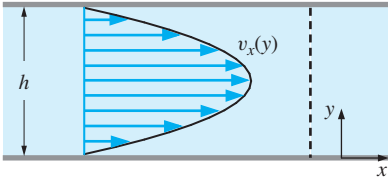
$$\Delta\psi = \frac{\psi_s - \psi_i}{9} = \frac{0,045 - 0}{9} = 0,005 \text{ m}^2/\text{s}$$

Tali linee di flusso non risultano equidistanti. Infatti, essendo la portata per unità di profondità tra due successive linee di flusso sempre pari a $0,005 \text{ m}^2/\text{s}$ ed essendo la velocità crescente linearmente dal valore nullo sulla lastra inferiore al valore $V = 3 \text{ m/s}$ sulla lastra superiore, la distanza tra due linee di flusso successive diminuisce verso l'alto.



9.16 Si consideri il moto permanente di un fluido incompressibile, in regime di moto laminare, tra due lastre piane parallele indefinite, a distanza h , forzato da un gradiente di pressione dp/dx costante e negativo. La componente della velocità secondo x è

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$$



in cui μ è la viscosità del fluido. La componente della velocità secondo y è $v_y = 0$. Scrivere un'espressione per la funzione di corrente lungo la linea verticale tratteggiata in figura, ponendo, per semplicità, $\psi = 0$ in corrispondenza della lastra inferiore. Quanto vale ψ in corrispondenza della lastra superiore?

Analisi Per la prima delle 9.20, si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$$

Integrando rispetto a y e aggiungendo una funzione arbitraria di x , piuttosto che una costante, visto che l'integrazione è parziale, si ottiene

$$\psi = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right) + g(x)$$

Per la seconda delle 9.20, si ha

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -g'(x)$$

in cui $g'(x) = dg/dx$, perché g è funzione della sola variabile x . Eguagliando tale espressione con quella assegnata ($v_y = 0$), si ha

$$g'(x) = 0$$

da cui

$$g(x) = \text{costante} = C$$

e, sostituendo nell'espressione di ψ ,

$$\psi = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right) + C$$

Imponendo che sia $\psi = 0$ in corrispondenza della lastra inferiore, cioè per $y = 0$, risulta $C = 0$. Per cui, l'espressione finale di ψ è

$$\psi = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right)$$

Essendo tale espressione indipendente da x , essa è valida non solo lungo la linea verticale tratteggiata in figura, ma lungo qualunque altra verticale in tutto il campo di moto. Infatti, anche il campo di velocità assegnato è indipendente da x , perché il moto è completamente sviluppato. Il valore ψ_s che la funzione di corrente assume in corrispondenza della lastra superiore, cioè per $y = h$, è

$$\psi = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h^3}{3} - h \frac{h^2}{2} \right) = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3$$

9.17 Con riferimento al problema precedente, calcolare la portata tra le due lastre, per unità di profondità, integrando il campo di velocità e confrontare il risultato con quello ottenibile direttamente dai valori della funzione di corrente.

Analisi Integrando il campo di velocità, con riferimento ad una profondità unitaria, la portata risulta

$$Q = \int_0^h v_x dy = \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right) = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3$$

Dai valori della funzione di corrente, indicando con ψ_s e ψ_i i valori che la funzione di corrente assume, rispettivamente, in corrispondenza della lastra superiore e di quella inferiore, si ha direttamente

$$Q = \psi_s - \psi_i = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3 - 0 = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3$$

risultato coincidente col precedente.

9.18 Con riferimento al moto del problema 9.16, il fluido è acqua a 20 °C ($\mu = 1,002 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$). Per il caso in cui è $dp/dx = -20\,000 \text{ N/m}^3$ e $h = 1,2 \text{ mm}$, disegnare alcune linee di flusso per valori della funzione di corrente a differenza costante. Queste linee di flusso risultano equidistanti? Perché?

Analisi La funzione di corrente

$$\psi = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right)$$

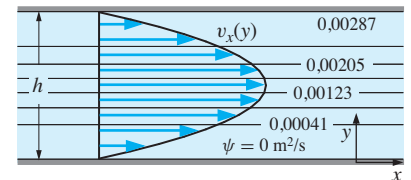
con i valori assegnati, in corrispondenza della lastra superiore assume il valore

$$\psi_s = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} h^3 = -\frac{-20\,000 \times 0,0012^3}{12 \times 1,002 \times 10^{-3}} = 0,00287 \text{ m}^2/\text{s}$$

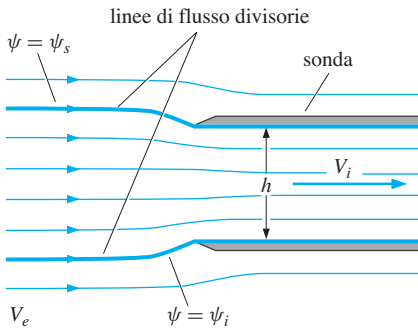
mentre in corrispondenza della lastra inferiore assume il valore $\psi_i = 0$. Dividendo la differenza tra i due valori in 7 intervalli uguali, è possibile tracciare le 8 linee di flusso aventi valori della funzione di corrente corrispondenti alla differenza costante

$$\Delta\psi = \frac{\psi_s - \psi_i}{7} = \frac{0,00287 - 0}{7} = 0,000410 \text{ m}^2/\text{s}$$

Tali linee di flusso non risultano equidistanti. Infatti, essendo la portata per unità di profondità tra due successive linee di flusso sempre pari a $0,000410 \text{ m}^2/\text{s}$ ed essendo la velocità crescente con legge parabolica dal valore nullo sulle pareti al valore massimo sull'asse, la distanza tra due linee di flusso successive è crescente dall'asse verso le pareti.



9.19 Per monitorare la qualità dell'aria, vengono prelevati campioni tramite una sonda allineata con la direzione del vento, aspirando l'aria tramite una pompa. Perché le misure siano corrette, la velocità V_i dell'aria all'interno della sonda deve essere uguale a quella V_e del vento all'esterno. Se l'aspirazione è



eccessiva, la velocità all'interno della sonda risulta maggiore. Si consideri per semplicità un caso bidimensionale, in cui la sonda sia alta $h = 4,5$ mm e larga (nella direzione ortogonale a quella della figura) $b = 52$ mm. I valori della funzione di corrente sulle linee di flusso divisorie superiore e inferiore sono, rispettivamente, $\psi_s = 0,150$ m²/s e $\psi_i = 0,105$ m²/s. Calcolare la portata, in m³/s, e la velocità media V_i dell'aria all'interno della sonda.

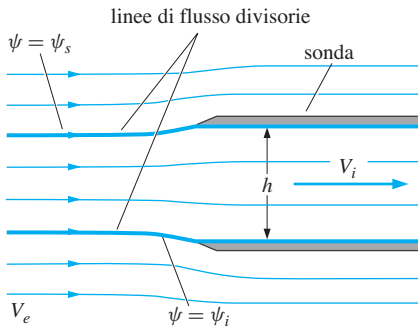
Analisi La portata per unità di larghezza è pari alla differenza tra i valori che la funzione di corrente assume in corrispondenza delle linee di flusso divisorie superiore e inferiore, per cui la portata totale è

$$Q = (\psi_s - \psi_i)b = (0,150 - 0,105) \times 0,052 = 0,00234 \text{ m}^3/\text{s}$$

mentre la velocità media V_i dell'aria all'interno della sonda è data dal rapporto tra la portata e l'area della sezione trasversale della sonda

$$V_i = \frac{Q}{bh} = \frac{(\psi_s - \psi_i)b}{bh} = \frac{\psi_s - \psi_i}{h} = \frac{0,150 - 0,105}{0,0045} = 10 \text{ m/s}$$

Discussione All'interno della sonda le linee di flusso sono più vicine tra loro perché, essendo la velocità media V_i maggiore della velocità esterna V_e , perché si mantenga costante il valore della portata per unità di larghezza, la distanza tra le linee deve essere minore.



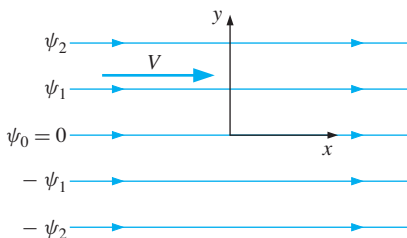
9.20 Si supponga che, nel problema precedente, l'aspirazione di aria sia troppo debole anziché eccessiva. Tracciare l'andamento delle linee di flusso in questo caso, indicando le linee di flusso divisorie superiore e inferiore.

Analisi Se l'aspirazione è troppo debole, la portata d'aria all'interno della sonda è troppo bassa e la velocità media V_i risulta inferiore a quella V_e del vento all'esterno. Le linee di flusso, per quanto rilevato nella discussione del problema precedente, sono più fitte all'esterno e si allargano all'interno della sonda.

9.21 Con riferimento al problema 9.19, quanto vale la velocità del vento, se la distanza tra le linee di flusso divisorie è di 5,8 mm?

Analisi Con riferimento al campo di moto all'esterno della sonda, la velocità media V_e del vento risulta

$$V_e = \frac{\psi_s - \psi_i}{h_e} = \frac{0,150 - 0,105}{0,0058} = 7,76 \text{ m/s}$$



9.22 Si consideri un moto bidimensionale di un fluido incomprimibile, con distribuzione di velocità costante in direzione trasversale, per il quale la componente della velocità secondo x è $v_x = V$ e la componente della velocità secondo y è $v_y = 0$. Scrivere un'espressione della funzione di corrente e , per $V = 8,9$ m/s, calcolare la portata per unità di profondità, tra le linee ψ_2 e ψ_0 , essendo ψ_2 una linea orizzontale a $y = 0,5$ m e, sull'asse x , $\psi_0 = 0$.

Analisi Per la prima delle 9.20, si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = V$$

Integrando rispetto a y e aggiungendo una funzione arbitraria di x , piuttosto che una costante, visto che l'integrazione è parziale, si ottiene

$$\psi = Vy + g(x)$$

Per la seconda delle 9.20, si ha

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -g'(x)$$

in cui $g'(x) = dg/dx$, perché g è funzione della sola variabile x . Eguagliando tale espressione con quella assegnata ($v_y = 0$), si ha

$$g'(x) = 0$$

da cui

$$g(x) = \text{costante} = C$$

e, sostituendo nell'espressione di ψ ,

$$\psi = Vy + C$$

Imponendo che sia $\psi = 0$ per $y = 0$, si ha $C = 0$. Per cui, l'espressione finale di ψ è

$$\psi = Vy$$

che per $y = 0,5$ fornisce

$$\psi_2 = Vy = 8,9 \times 0,5 = 4,45 \text{ m}^2/\text{s}$$

Pertanto, la portata per unità di profondità, tra le linee ψ_2 e ψ_0 è pari a

$$q = \psi_2 - \psi_0 = 4,45 - 0 = 4,45 \text{ m}^2/\text{s}$$

La portata può essere calcolata anche come prodotto della velocità per l'area della sezione trasversale, alta $y = 0,5$ m e di profondità unitaria,

$$q = Vy = 8,9 \times 0,5 = 4,45 \text{ m}^2/\text{s}$$

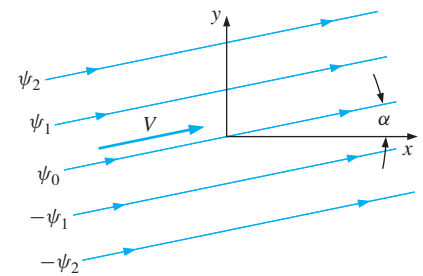
9.23 Si consideri un moto bidimensionale di un fluido incomprimibile, con direzione inclinata di α sull'orizzontale e distribuzione di velocità costante in direzione trasversale, per il quale la componente della velocità secondo l'asse x è $v_x = V \cos \alpha$ e la componente della velocità secondo l'asse y è $v_y = V \sin \alpha$. Scrivere un'espressione della funzione di corrente.

Analisi Per la prima delle 9.20, si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = V \cos \alpha$$

Integrando rispetto a y e aggiungendo una funzione arbitraria di x , piuttosto che una costante, visto che l'integrazione è parziale, si ottiene

$$\psi = Vy \cos \alpha + g(x)$$



Per la seconda delle 9.20, si ha

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -g'(x)$$

in cui $g'(x) = dg/dx$, perché g è funzione della sola variabile x . Eguagliando tale espressione con quella assegnata ($v_y = V \sin \alpha$), si ha

$$v_y = -g'(x) = V \sin \alpha$$

da cui

$$g'(x) = -V \sin \alpha$$

e

$$g(x) = -xV \sin \alpha + C$$

essendo C una costante, perché g è funzione della sola x . Sostituendo nell'espressione di ψ , si ha infine

$$\psi = V(y \cos \alpha - x \sin \alpha) + C$$

9.24 La funzione di corrente di un moto permanente bidimensionale, nel piano xy , di un fluido incompressibile è $\psi = ax^2 + bxy + cy^2$, con a , b e c costanti. Scrivere l'espressione delle componenti di velocità v_x e v_y e verificare che sia soddisfatta l'equazione di continuità.

Analisi Per le 9.20, le componenti della velocità sono

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = bx + 2cy \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2ax - by$$

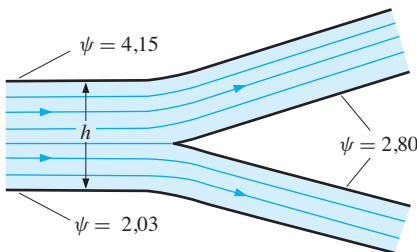
Per un fluido incompressibile in moto permanente l'equazione di continuità è la 9.18

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

che diviene

$$b - b + 0 = 0$$

e, pertanto, risulta soddisfatta.



9.25 Il risultato di una simulazione numerica, relativa al campo di moto all'interno di una diramazione asimmetrica in una condotta a sezione rettangolare, mostra le linee di flusso riportate in figura, con ψ in m^2/s . Che percentuale di portata defluisce nel ramo superiore?

Analisi La portata per unità di larghezza è pari alla differenza tra i valori della funzione di corrente tra due linee di flusso. Nel tratto a monte della diramazione, con riferimento ad una larghezza unitaria, la portata vale

$$q_m = \psi_s - \psi_i = 4,15 - 2,03 = 2,12 \text{ m}^2/\text{s}$$

mentre nel ramo superiore è

$$q_s = \psi_s - \psi_{i,s} = 4,15 - 2,80 = 1,35 \text{ m}^2/\text{s}$$

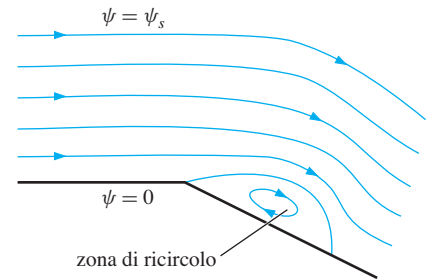
pari a $1,35/2,12 = 0,637 = 63,7\%$ della portata totale.

9.26 Con riferimento al problema precedente, calcolare l'altezza h , in cm, del ramo principale quando in esso la velocità media è di 11,4 m/s.

Analisi L'altezza del ramo principale è pari al rapporto tra la portata per unità di larghezza che defluisce in tale ramo e la velocità media

$$h = \frac{q_m}{V_m} = \frac{2,12}{11,4} = 0,186 \text{ m} = 18,6 \text{ cm}$$

9.27 In corrispondenza dello spigolo in una parete, il fluido si separa, formando una zona di ricircolo, come mostrato dalle linee di flusso tracciate nella figura. Il valore della funzione di corrente in corrispondenza della parete è zero, mentre quello in corrispondenza della linea di flusso più in alto, tra quelle tracciate, è ψ_s . Il valore della funzione di corrente all'interno della zona di ricircolo è positivo o negativo? Dov'è che ψ assume valore minimo?



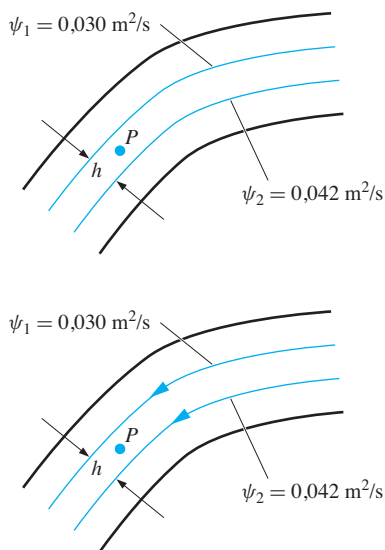
Analisi Nel moto bidimensionale di un fluido incompressibile, la portata per unità di larghezza è pari alla differenza tra i valori della funzione di corrente tra due linee di flusso. Per esempio, nel caso in esame, la differenza $\psi_s - \psi_0 = \psi_s$ è una quantità positiva e rappresenta la portata per unità di larghezza che defluisce tra la linea di flusso più in alto e la parete. Tra tali linee, il moto è da sinistra verso destra. Nella zona di ricircolo, la differenza tra il valore ψ_0 della funzione di corrente sulla linea di flusso divisoria, nullo, e il valore ψ_i corrispondente ad una linea di flusso interna rappresenta la portata per unità di larghezza tra tali linee e, poiché nella parte superiore della zona di ricircolo il moto è sempre da sinistra verso destra, anche tale differenza deve essere positiva, cosa che può risultare solo se ψ_i è negativa. Analogamente, nella parte inferiore della zona di ricircolo il moto è da destra verso sinistra, e dunque la differenza tra ψ_i e il valore ψ_0 della funzione di corrente sulla parete, nullo, deve essere negativa, come assicurato solo da valori negativi di ψ_i . Pertanto, il valore della funzione di corrente all'interno della zona di ricircolo è negativo e ψ assume valore minimo al centro della zona di ricircolo.

Discussione Quanto rilevato sopra non significa che all'interno delle zone di ricircolo la funzione di corrente assuma valori sempre negativi. Infatti, la funzione di corrente è definita sempre a meno di una costante e può, quindi, assumere valori diversi senza che le caratteristiche del moto cambino.

9.28 Osservando le linee di flusso di un certo campo di moto, tracciate per valori della funzione di corrente a differenza costante, come è possibile individuare le zone in cui la velocità del fluido è maggiore?

Analisi Se le linee di flusso sono tracciate per valori della funzione di corrente a differenza costante, essendo tale differenza pari alla portata per unità di larghezza che defluisce tra due linee contigue, la velocità del fluido è maggiore dove le linee sono più vicine tra loro.

9.29 Per indicare la direzione del moto, porre delle frecce sulle linee di flusso



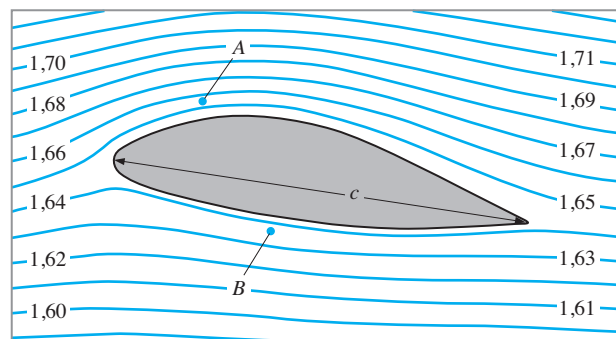
del campo di moto permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile in una condotta curva, riportato in figura, e calcolare, per $h = 5$ cm, qual è, all'incirca, la velocità nel punto P .

Analisi Per la definizione di funzione di corrente data dalle 9.20, il moto va da sinistra verso destra quando i valori della funzione di corrente sono crescenti nella direzione verticale y positiva (verso l'alto). Nel caso considerato, ψ cresce nella direzione y negativa, per cui il moto è diretto da destra verso sinistra. La velocità nel punto P può essere assunta pari alla velocità media tra le linee di flusso ψ_1 e ψ_2 , che a sua volta può essere calcolata come rapporto tra la portata per unità di larghezza tra tali linee (pari alla differenza tra i valori di ψ) e la loro distanza h . Per cui, si ha

$$v_P = \frac{\psi_2 - \psi_1}{h} = \frac{0,042 - 0,030}{0,05} = 0,24 \text{ m/s}$$

Discussione Le proprietà del fluido non hanno alcuna influenza sul valore di velocità calcolato, che è stato desunto unicamente dalle caratteristiche cinematiche del moto. Pertanto, tale valore di velocità è lo stesso per qualunque fluido incomprimibile il cui campo di moto sia quello di figura.

9.30 Risolvendo numericamente le equazioni del moto, si sono ottenute le linee di flusso riportate in figura, relative al moto permanente bidimensionale attorno a un profilo alare, la cui corda misura $c = 9,0$ mm. I valori della funzione di corrente sono in m^2/s . Il fluido è aria a temperatura ambiente. Tracciare il vettore velocità in corrispondenza dei punti A e B , calcolarne il valore in A e spiegare come viene generata la portanza.



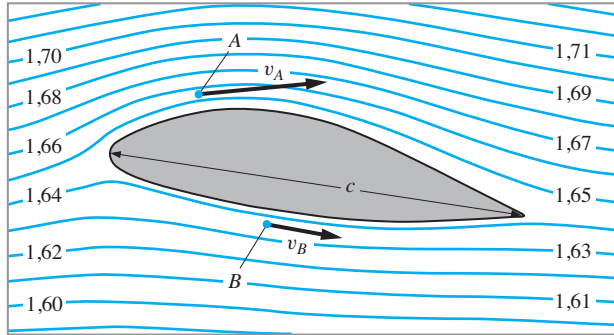
Analisi Per la definizione di funzione di corrente data dalle 9.20, il moto va da sinistra verso destra quando i valori della funzione di corrente sono crescenti nella direzione verticale y positiva (verso l'alto). Poiché il moto avviene da sinistra verso destra, il vettore velocità nei punti A e B è diretto da sinistra verso destra. Il modulo della velocità in A , nota la distanza h_A tra le due linee di flusso in prossimità del punto A , può essere calcolato come rapporto tra la portata per unità di larghezza tra tali linee (pari alla differenza tra i valori di ψ) e la loro distanza. Misurando con un righello direttamente sul disegno, risulta $h_A \cong 0,032 c = 0,032 \times 9 = 0,29$ mm. Pertanto,

$$v_A = \frac{\psi_2 - \psi_1}{h_A} = \frac{1,66 - 1,65}{0,29 \times 10^{-3}} = 34 \text{ m/s}$$

La velocità in B , essendo la distanza h_B tra le due linee di flusso in prossimità del punto B maggiore di h_A , è minore della velocità in A . Risulta $h_B \cong 1,7 h_A$ e, pertanto,

$$v_B = \frac{h_A}{h_B} v_A = \frac{1}{1,7} \times 34 = 20 \text{ m/s}$$

Essendo le velocità al di sopra del profilo alare maggiori di quelle al di sotto, le pressioni sulla superficie inferiore del profilo, per il teorema di Bernoulli, sono maggiori delle pressioni sulla superficie superiore. Da ciò deriva la spinta diretta verso l'alto, che prende il nome di portanza.



Equazione della quantità di moto e condizioni al contorno

9.31 Discutere il significato di ciascun termine dell'equazione della quantità di moto

$$\int_W \rho \mathbf{g} dW + \int_A \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n} dA - \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} dW - \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

Analisi Il primo termine dell'equazione è il risultante delle forze di massa agenti sul volume di controllo, il secondo è il risultante delle forze di superficie agenti sul volume di controllo, il terzo è la variazione nell'unità di tempo della quantità di moto del volume di controllo e l'ultimo è il flusso totale di quantità di moto attraverso la superficie di controllo. Essendo

$$\int_W \rho \mathbf{g} dW + \int_A \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} dW + \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

il risultante delle forze agenti sul volume di controllo, somma delle forze di massa e delle forze di superficie, è uguale alla somma della variazione nell'unità di tempo della quantità di moto del volume di controllo e del flusso totale di quantità di moto attraverso la superficie di controllo.

9.32 Un aereo viaggia a velocità costante V . Quali sono le condizioni al contorno in corrispondenza della parete esterna dell'aereo e a notevole distanza da esso (a) in un sistema di riferimento solidale con la superficie terrestre e (b) in un sistema di riferimento solidale con l'aereo?



Analisi (a) In un sistema di riferimento solidale con la superficie terrestre, in corrispondenza della parete esterna dell'aereo, per la condizione di aderenza, l'aria si muove con la stessa velocità della parete e, pertanto, è ovunque $v = V$. A notevole distanza dall'aereo, l'aria è in quiete e, pertanto, è $v = 0$.

(b) In un sistema di riferimento solidale con l'aereo, la parte esterna dell'aereo è ferma e dunque, sempre per la condizione di aderenza, anche l'aria a contatto con essa, per cui è $v = 0$. A notevole distanza dall'aereo, l'aria si muove verso l'aereo con velocità uguale e opposta a quella dell'aereo e, pertanto, è $v = -V$.

Discussione Per la condizione di aderenza, qualunque sia il sistema di riferimento scelto, in corrispondenza di una parete solida il fluido deve assumere la stessa velocità della parete.

9.33 Cosa sono le *equazioni costitutive*? In quali equazioni della meccanica dei fluidi vengono usate?

Analisi Le equazioni costitutive sono relazioni che esprimono le componenti del tensore degli sforzi in funzione delle componenti della velocità e della pressione. Esse vengono usate nell'equazione di Cauchy per rendere determinato il problema della risoluzione di un campo di moto.

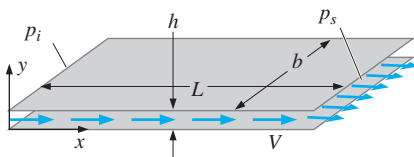
9.34 Qual è la differenza principale tra fluidi newtoniani e fluidi non newtoniani?

Analisi Per i fluidi newtoniani lo sforzo tangenziale è proporzionale alla velocità di deformazione angolare. Per i fluidi non newtoniani il legame tra sforzo tangenziale e velocità di deformazione angolare è non lineare. La maggior parte dei fluidi di comune impiego, come l'aria e altri gas, l'acqua, il kerosene, la benzina e altri derivati del petrolio, sono fluidi newtoniani.

Discussione Le equazioni di Navier-Stokes valgono solo per i fluidi newtoniani. Equazioni analoghe per fluidi non newtoniani potrebbero essere ricavate dall'equazione di Cauchy, introducendo in essa gli appropriati legami costitutivi non lineari.

9.35 Definire i fluidi viscoelastici, pseudoplastici, dilatanti e alla Bingham.

Analisi Un fluido *viscoelastico* è un fluido che ritorna (parzialmente o totalmente) alla sua forma originale dopo che lo sforzo applicato viene rimosso. Un fluido *pseudoplastico* è un fluido che al crescere della sollecitazione diventa meno viscoso. Un fluido *dilatante* è un fluido che diviene tanto più viscoso quanto più è sollecitato. In un fluido *plastico alla Bingham* è necessario superare uno sforzo di soglia perché esso cominci a scorrere.



9.36 Tra due lastre piane parallele, di larghezza $b = 0,75$ m e lunghezza $L = 1,5$ m, distanti $h = 2,5$ mm, scorre olio motore alla temperatura di 60°C ($\rho = 864$ kg/m³ e $\mu = 72,5 \times 10^{-3}$ Pa · s). Allo sbocco la pressione relativa è nulla, mentre all'imbocco è pari a 1 bar. Noto il campo di velocità (vedi problema 9.16), calcolare la portata e il numero di Reynolds, usando

come dimensione caratteristica la distanza h , e stabilire se il moto è laminare o turbolento.

Analisi Il campo di velocità è definito dalle equazioni

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \quad v_y = 0$$

Essendo il gradiente di pressione

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{L} = \frac{0 - 100\,000}{1,5} = -66\,700 \text{ N/m}^3$$

la portata risulta

$$\begin{aligned} Q &= \int_A v_x dA = \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) b dy = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} hy^2 \right]_0^h = \\ &= -\frac{1}{12} \frac{dp}{dx} h^3 b = \frac{66\,700 \times 0,0025^3 \times 0,75}{12 \times 72,5 \times 10^{-3}} = 0,898 \text{ l/s} \end{aligned}$$

Essendo la velocità media

$$V = \frac{Q}{hb} = \frac{0,898 \times 10^{-3}}{0,0025 \times 0,75} = 0,479 \text{ m/s}$$

il numero di Reynolds risulta

$$\text{Re} = \frac{\rho V h}{\mu} = \frac{864 \times 0,479 \times 0,0025}{72,5 \times 10^{-3}} = 14,3$$

e, pertanto, il moto è laminare.

9.37 Si consideri il campo di velocità di un moto permanente bidimensionale di un fluido incompressibile

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (ax + b)\mathbf{i} + (-ay + c)\mathbf{j}$$

con a , b e c costanti. Esprimere la pressione in funzione di x e y .

Analisi Il campo di velocità soddisfa l'equazione di continuità 9.60a perché

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = a - a = 0$$

La componente in direzione x dell'equazione di Navier-Stokes, espressa dalla 9.60b, essendo nullo il termine della gravità per ipotesi, nulle le derivate rispetto a z perché il moto è bidimensionale nel piano xy e nulla la derivata rispetto al tempo perché il moto è permanente, risulta

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

Essendo

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = a$$

e

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

sono nulle anche le derivate seconde, per cui

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho[a(ax + b)] = -\rho a(ax + b)$$

Analogamente, in direzione y vale la 9.60c che diviene

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)$$

Essendo

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

e

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -a$$

sono nulle anche le derivate seconde, per cui

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho[-a(-ay + c)] = \rho a(-ay + c)$$

Perché sia fisicamente possibile, il campo di pressione $p(x, y)$ deve essere espresso da una funzione regolare, cioè infinitamente derivabile rispetto a x e a y , in quanto non possono esserci discontinuità in p né nelle sue derivate. Se questa condizione è verificata, l'ordine di derivazione è ininfluente (Fig. 9.30). Poiché le derivate miste delle due relazioni

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

risultano uguali, la condizione è soddisfatta. Ne consegue che *il campo di velocità assegnato è fisicamente possibile*. Per il calcolo della $p(x, y)$, l'integrazione parziale della

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a(ax + b)$$

fornisce

$$p(x, y) = -\rho a \left(\frac{1}{2} ax^2 + bx \right) + g(y)$$

nella quale, essendo l'integrazione parziale, invece di una costante è stata aggiunta una funzione arbitraria dell'altra variabile y . Derivando rispetto a y ed uguagliando alla

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a(-ay + c)$$

si ha

$$g'(y) = \rho a(-ay + c)$$

dalla quale, integrando rispetto a y , si ottiene

$$g(y) = \rho a \left(-\frac{1}{2}ay^2 + cy \right) + C$$

nella quale C è una costante di integrazione arbitraria. Sostituendo nella espressione di p , si ha infine

$$\begin{aligned} p(x, y) &= -\rho a \left(\frac{1}{2}ax^2 + bx \right) + \rho a \left(-\frac{1}{2}ay^2 + cy \right) + C = \\ &= -\rho a \left(\frac{1}{2}ax^2 + bx + \frac{1}{2}ay^2 - cy \right) + C = \\ &= -\rho a \left[\frac{1}{2}a(x^2 + y^2) + bx - cy \right] + C \end{aligned}$$

9.38 Si consideri il moto permanente bidimensionale di un fluido viscoso incompressibile che scorre per gravità, in regime laminare, tra due lastre piane verticali indefinite, distanti h . Non essendovi applicato alcun gradiente di pressione esterno, all'interno del campo di moto la pressione è ovunque costante per l'equilibrio tra la forza di gravità e le forze viscose. Calcolare il campo di velocità e tracciarne il profilo, utilizzando opportune variabili adimensionali.

Analisi Seguendo la procedura indicata in Fig. 9.31, si ha:

Fase 1 Definizione del problema e della geometria: vedi figura.

Fase 2 Posizione delle ipotesi e delle condizioni al contorno. *Ipotesi:* 1. Il moto è bidimensionale nel piano xz , per cui $v_y = 0$. 2. La velocità è diretta ovunque come l'asse z , per cui $v_x = 0$. *Condizioni al contorno:* essendo $h_s = h/2$ il semispessore della corrente, per $x = -h_s$ e per $x = h_s$ si ha $v_x = v_y = v_z = 0$ (condizione di aderenza).

Fase 3 Semplificazione delle equazioni. Si ha $v_x = 0$ per l'ipotesi 2 e $v_y = 0$ per l'ipotesi 1, per cui l'equazione di continuità 9.60a diviene

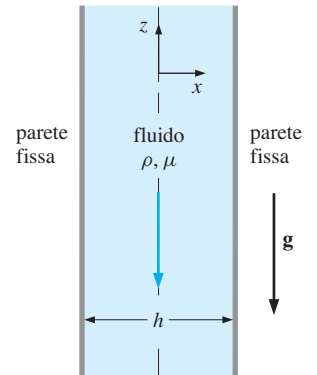
$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ne deriva che v_z non è funzione di z . In altre parole, il profilo di velocità è lo stesso per qualunque valore di z , cioè il moto è uniforme. Per l'ipotesi 1, v_z può essere, quindi, funzione solo di x . Le equazioni di Navier-Stokes 9.60b e 9.60c nelle direzioni x e y , essendo ovunque $v_x = v_y = 0$ ed agendo la gravità solo in direzione z , sono identicamente soddisfatte (tutti i termini sono nulli in entrambe le equazioni). In direzione z , la 9.60d

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \\ &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

essendo $\partial v_z / \partial t = 0$ perché il moto è permanente, $v_x = v_y = 0$ per le ipotesi 2 e 1, $\partial v_z / \partial z = 0$ per la continuità, $\partial p / \partial z = 0$ perché la pressione è ovunque costante e $\partial^2 v_z / \partial y^2 = \partial^2 v_z / \partial z^2 = 0$ perché v_z è funzione solo di x , diviene

$$\rho g_z + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = 0$$



e, essendo $g_z = -g$ e v_z funzione della sola x per cui la derivata parziale coincide con la derivata totale,

$$\frac{d^2 v_z}{dx^2} = \frac{\rho g}{\mu}$$

Fase 4 *Risoluzione delle equazioni differenziali.* Integrando due volte, si ha

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2$$

Fase 5 *Applicazione delle condizioni al contorno.* Applicando le condizioni al contorno definite nella fase 2, si ha: per $x = -h_s$

$$0 = \frac{\rho g}{2\mu} (-h_s)^2 + C_1 (-h_s) + C_2$$

e per $x = h_s$

$$0 = \frac{\rho g}{2\mu} h_s^2 + C_1 h_s + C_2$$

da cui

$$C_1 = 0 \quad C_2 = -\frac{\rho g}{2\mu} h_s^2$$

Quindi, la legge di distribuzione della velocità tra la parete e la mezzeria è

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g}{2\mu} h_s^2 = \frac{\rho g}{2\mu} (x^2 - h_s^2)$$

Essendo ovunque $-h_s < x < h_s$, v_z è ovunque negativa, cioè diretta verso il basso.

Fase 6 *Verifica dei risultati.* Partendo dai risultati ottenuti si può verificare che le equazioni differenziali e le condizioni al contorno sono soddisfatte. La legge di distribuzione della velocità, scritta in forma adimensionale, ponendo

$$x^* = \frac{x}{h_s} \quad v_z^* = \frac{2\mu v_z}{\rho g h_s^2}$$

diviene

$$v_z^* = x^{*2} - 1$$

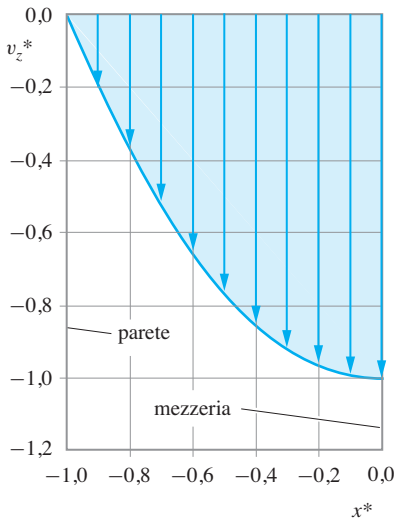
Discussione La legge di distribuzione della velocità è identica a quella trovata nell'esempio 9.10

$$v_z^* = \xi^*(\xi^* - 2)$$

in cui un film di olio di spessore h_s scorre per gravità su una parete piana verticale indefinita. L'unica differenza è la posizione dell'origine dell'asse ξ , che nell'esempio 9.10 è sulla parete, invece che sulla superficie libera, dove $\xi = h_s$ e, quindi, $\xi^* = 1$. Effettuando il cambio di origine si ha $\xi^* = 1 - x^*$, per cui la legge di distribuzione della velocità del problema 9.10, nel riferimento adottato per questo problema, diviene

$$\begin{aligned} v_z^* &= \xi^*(\xi^* - 2) = (1 - x^*)[(1 - x^*) - 2] = \\ &= (1 - x^*)^2 - 2(1 - x^*) = x^{*2} - 1 \end{aligned}$$

cioè identica a quella sopra ottenuta.



9.39 Con riferimento al problema precedente, scrivere un'espressione della portata per unità di profondità in funzione di ρ , μ , h e g . Confrontare il risultato con quello dell'Esempio 9.10 in cui il fluido, a parità di tutto il resto, scorre su una lastra verticale con una superficie libera al posto della seconda lastra. Discutere le differenze, fornendone una spiegazione fisica.

Analisi Con riferimento al problema precedente, la portata per unità di profondità si calcola per integrazione del profilo di velocità

$$q = \int_{-h_s}^{h_s} v_z dx = \int_{-h_s}^{h_s} \frac{\rho g}{2\mu} (x^2 - h_s^2) dx = \frac{\rho g}{2\mu} \left[\frac{x^3}{3} - h_s^2 x \right]_{-h_s}^{h_s} =$$

$$= \frac{\rho g}{2\mu} \left(\frac{h_s^3}{3} - h_s^3 + \frac{h_s^3}{3} - h_s^3 \right) = -\frac{\rho g}{2\mu} \frac{4}{3} h_s^3 = -\frac{\rho g}{12\mu} h_s^3$$

Il segno negativo dipende dall'aver assunto il verso verticale positivo verso l'alto, mentre il moto risulta diretto verso il basso. Analogamente, integrando il profilo di velocità dell'esempio 9.10, relativo ad un film di olio di spessore h_s pari al semispessore della corrente del problema precedente, la portata risulta

$$q = \int_0^{h_s} v_z dx = \int_0^{h_s} \frac{\rho g}{2\mu} x(x - 2h_s) dx = \frac{\rho g}{2\mu} \left[\frac{x^3}{3} - x^2 h_s \right]_0^{h_s} =$$

$$= \frac{\rho g}{2\mu} \left(\frac{h_s^3}{3} - h_s^3 - 0 + 0 \right) = -\frac{\rho g}{2\mu} \frac{2}{3} h_s^3 = -\frac{\rho g}{3\mu} h_s^3$$

Come già rilevato nella discussione del problema precedente, il profilo di velocità dell'esempio 9.10 è identico al profilo relativo alla metà del campo del problema precedente. Pertanto, la portata dell'esempio 9.10 è esattamente uguale alla metà di quella del problema precedente.

9.40 Si consideri il moto permanente laminare di un fluido incomprimibile newtoniano in una tubazione circolare infinitamente lunga di diametro D inclinata di α rispetto all'orizzontale. Il fluido si muove solo per gravità, non essendovi applicato alcun gradiente di pressione ($dp/dx = 0$). Scelto un sistema di riferimento avente l'asse x coincidente con l'asse della tubazione, positivo nella direzione del moto, scrivere un'espressione per la componente v_x della velocità in funzione della distanza r lungo il raggio e degli altri parametri del problema e calcolare la portata e la velocità media.

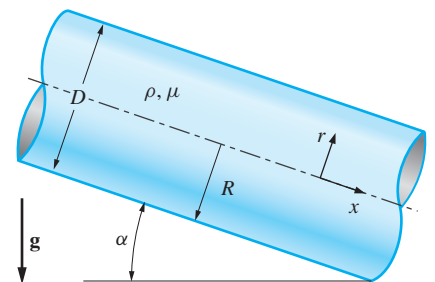
Analisi Seguendo la procedura indicata in Fig. 9.31, si ha:

Fase 1 Definizione del problema e della geometria: vedi figura.

Fase 2 Posizione delle ipotesi e delle condizioni al contorno. *Ipotesi:* 1. La velocità è diretta ovunque come l'asse x , per cui la componente radiale v_r è ovunque nulla. 2. Il campo di moto è a simmetria assiale, per cui la componente $v_\theta = 0$ e tutte le derivate parziali rispetto a θ sono anch'esse nulle. *Condizioni al contorno:* per $r = R$, $v = 0$; per $r = 0$, per la condizione di simmetria la velocità ha un massimo, per cui $\partial v_x / \partial r = 0$.

Fase 3 Scrittura e semplificazione delle equazioni differenziali. Essendo $v_r = 0$ per l'ipotesi 1 e $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$ per l'ipotesi 2, l'equazione di continuità 9.61a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$



diviene

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Ne deriva che v_x non è funzione di x . In altre parole, il profilo di velocità è lo stesso per qualunque valore di x , cioè il moto è *uniforme*. Pertanto, v_x può essere funzione solo di r . In direzione x , la 9.61d

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \\ = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

essendo $\partial v_x / \partial t = 0$ perché il moto è permanente, $v_r = v_\theta = 0$ per le ipotesi 1 e 2, $\partial v_x / \partial x = 0$ per la continuità, $\partial^2 v_x / \partial \theta^2 = \partial^2 v_x / \partial x^2 = 0$ perché v_x è funzione solo di r e $dp/dx = 0$ perché il fluido si muove solo per gravità, diviene

$$0 = \rho g_x + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]$$

e, essendo $g_x = g \sin \alpha$ e v_x funzione solo di r per cui la derivata parziale coincide con la derivata totale,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu}$$

Tutti i termini della 9.61b e della 9.61c sono nulli.

Fase 4 *Risoluzione delle equazioni differenziali.* Integrando una prima volta, si ha

$$r \frac{dv_x}{dr} = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} \frac{r^2}{2} + C_1$$

in cui C_1 è una costante. Dividendo ambo i membri per r e integrando una seconda volta, si ottiene

$$v_x = - \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

in cui C_2 è una seconda costante di integrazione.

Fase 5 *Applicazione delle condizioni al contorno.* Per $r = 0$, dalla prima relazione si ha

$$r \frac{dv_x}{dr} = 0 + C_1 = 0$$

da cui $C_1 = 0$. Alla parete, per $r = R$, si ha

$$v_x = - \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} R^2 + C_2 = 0$$

da cui

$$C_2 = \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} R^2$$

Quindi, la legge di distribuzione della velocità è

$$v_x = \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} (R^2 - r^2)$$

cioè parabolica, come nell'esempio 9.11.

Fase 6 Verifica dei risultati. Partendo dal risultato ottenuto si può verificare che le equazioni differenziali e le condizioni al contorno sono soddisfatte. Per integrazione del profilo di velocità, si ha

$$\begin{aligned} Q &= \int_A v_x dA = \int_0^R \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \\ &= \frac{\pi \rho g \sin \alpha}{2\mu} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi \rho g \sin \alpha}{8\mu} R^4 \end{aligned}$$

per cui la velocità media, pari al rapporto tra la portata e l'area della sezione trasversale, risulta

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\pi \rho g \sin \alpha}{8\mu} R^4 \frac{1}{\pi R^2} = \frac{\rho g \sin \alpha}{8\mu} R^2$$

Riepilogo

9.41 Perché l'ipotesi di fluido incompressibile e l'approssimazione di temperatura costante vanno spesso insieme?

Analisi L'ipotesi di fluido incompressibile comporta che la densità si mantenga costante, il che, a sua volta, significa che non è possibile tener conto delle conseguenze che una variazione di temperatura ha sulla densità stessa. Pertanto, ipotizzare che la densità sia costante comporta che sia tale anche la temperatura.

9.42 Per ciascuna delle seguenti equazioni, dire come viene chiamata, quali sono le ipotesi di base e qual è il significato fisico:

$$(a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij}$$

$$(c) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Analisi (a) **Equazione di continuità.** Esprime la legge di conservazione della massa in forma indefinita.

(b) **Equazione di Cauchy** o equazione della quantità di moto in forma indefinita. Esprime la seconda legge di Newton per il generico elementino infinitesimo di fluido.

(c) **Equazione di Navier-Stokes.** È l'espressione che assume l'equazione di Cauchy per i fluidi newtoniani, cioè per i fluidi per i quali vale la proporzionalità tra sforzo tangenziale e velocità di deformazione angolare.

9.43 Elencare le fasi della risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes e dell'equazione di continuità.

Analisi Nella procedura usata per la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes e dell'equazione di continuità possono essere individuate sei fasi:

Fase 1 *Definizione del problema e della geometria*, identificando tutte le dimensioni e i parametri significativi.

Fase 2 *Posizione delle ipotesi e delle condizioni al contorno*, introducendo le ipotesi, le approssimazioni, le semplificazioni e le condizioni al contorno più appropriate.

Fase 3 *Scrittura e semplificazione delle equazioni differenziali*, semplificando quanto più possibile le equazioni.

Fase 4 *Risoluzione delle equazioni differenziali*, integrando le equazioni e introducendo una o più costanti di integrazione.

Fase 5 *Applicazione delle condizioni al contorno* per determinare le costanti.

Fase 6 *Verifica dei risultati*.

Discussione Non sempre l'ordine delle varie fasi è quello sopra riportato. Per esempio, quando le equazioni vengono risolte numericamente, le condizioni al contorno vengono applicate prima dell'integrazione delle equazioni.

9.44 Assumendo che siano note le opportune condizioni al contorno e le proprietà del fluido, specificare quale delle affermazioni seguenti è vera o falsa, giustificando la risposta:

- (a) nel moto di un fluido incomprimibile con proprietà costanti ci sono, in generale, quattro incognite;
- (b) nel moto di un fluido comprimibile ci sono, in generale, cinque incognite;
- (c) nel moto di un fluido incomprimibile, l'equazione di continuità e l'equazione di Cauchy sono sufficienti per calcolare tutte le incognite;
- (d) nel moto di un fluido incomprimibile newtoniano con proprietà costanti, l'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes sono sufficienti per calcolare tutte le incognite.

Analisi (a) **Vero**. Le incognite sono la pressione p e le tre componenti della velocità v_x , v_y e v_z .

(b) **Falso**. Nel moto di un fluido comprimibile sono incognite la pressione p , le tre componenti della velocità v_x , v_y e v_z e la densità ρ , a sua volta funzione della temperatura T . Le incognite sono perciò sei (p , v_x , v_y , v_z , ρ e T).

(c) **Falso**. Nell'equazione di Cauchy figurano le componenti incognite del tensore degli sforzi, che devono essere scritte in funzione della pressione e della velocità utilizzando le equazioni costitutive del fluido.

(d) **Vero**. Nel moto di un fluido incomprimibile con proprietà costanti le incognite sono la pressione p e le tre componenti della velocità v_x , v_y e v_z . Pertanto, l'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes sono sufficienti per calcolare tutte le incognite.

9.45 Risolvere l'Esempio 9.10, ipotizzando che la parete si muova verso l'alto con velocità V e controllare che i risultati, per $V = 0$, coincidano con quelli dell'esempio. Adimensionalizzare le equazioni, come nell'esempio, introducendo numero di Froude e numero di Reynolds, e riportare su un grafico, commentando i risultati, v_z^* in funzione di x^* per $Fr = 0,5$ e $Re = 0,5$; $1,0$ e $5,0$.

Analisi L'esempio 9.10, considera il moto laminare, piano e permanente di un film di olio incomprimibile, di spessore h , che scorre per gravità su una parete

piana verticale indefinita. La pressione risulta uguale a quella atmosferica in ogni punto del campo, mentre la velocità è diretta ovunque verticalmente e varia con la distanza x dalla parete con la legge parabolica

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x(x - 2h)$$

essendo ρ la densità e μ la viscosità del fluido. Nel problema in esame, sono diverse solo le condizioni al contorno in corrispondenza della parete dove, al posto di $v_z = 0$, si ha $v_z = V$. Pertanto, è valida la legge di distribuzione di velocità dell'esempio 9.10

$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 + C_1 x + C_2$$

nella quale appaiono ancora le costanti di integrazione da determinare in base alle condizioni al contorno.

Fase 5 Applicazione delle condizioni al contorno. Per $x = 0$, si ha

$$v_z = 0 + 0 + C_2 = V$$

da cui $C_2 = V$. Per $x = h$, cioè sulla superficie libera, lo sforzo tangenziale è trascurabile e, pertanto, per la legge di Newton, il gradiente di velocità è nullo, come nell'esempio 9.10. Per cui

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\rho g}{\mu} h + C_1 = 0$$

da cui

$$C_1 = -\frac{\rho g}{\mu} h$$

Quindi, la legge di distribuzione della velocità è

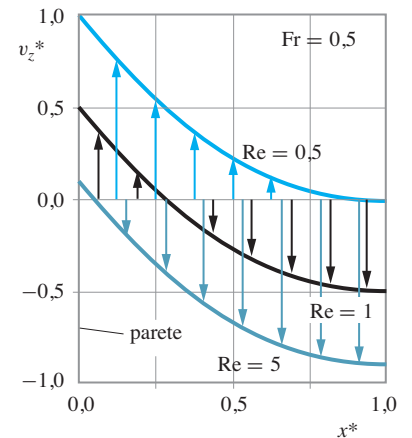
$$v_z = \frac{\rho g}{2\mu} x^2 - \frac{\rho g}{\mu} h x + V = -\frac{\rho g}{2\mu} x(x - 2h) + V$$

Essendo ovunque $x < h$, il primo addendo di v_z è negativo e il secondo positivo. Quindi, almeno in una porzione del campo di moto la velocità è diretta verso l'alto.

Fase 6 Verifica dei risultati. Partendo dai risultati ottenuti si può verificare che le equazioni differenziali e le condizioni al contorno sono soddisfatte. La legge di distribuzione della velocità, scritta in forma adimensionale, ponendo $x^* = x/h$ e $v_z^* = 2\mu v_z / \rho g h^2$, diviene

$$v_z^* = x^*(x^* - 2) + \frac{2\mu}{\rho V h} \frac{V^2}{g h} = x^*(x^* - 2) + 2 \frac{\text{Fr}^2}{\text{Re}}$$

Discussione Per qualunque valore di Fr e di Re il profilo di velocità ha pendenza nulla in corrispondenza della superficie libera. Se V è sufficientemente elevata, la portata defluisce verso l'alto.



9.46 Con riferimento al problema precedente, esprimere la portata per unità di profondità Q/L del film di olio che scorre sulla parete, in funzione della velocità V della parete e degli altri parametri del problema. Quanto deve valere la

velocità V , in funzione di ρ , μ , h e g , perché tale portata sia nulla? Quanto vale V per un film di olio di spessore 5,0 mm con $\rho = 888 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 0,80 \text{ Pa}\cdot\text{s}$?

Analisi Integrando il profilo di velocità, la portata per unità di profondità risulta

$$\begin{aligned}\frac{Q}{L} &= \int_0^h v_z dx = \int_0^h \left[\frac{\rho g}{2\mu} x(x - 2h) + V \right] dx = \\ &= \left[\frac{\rho g}{2\mu} \left(\frac{x^2}{3} - x^2 h \right) + Vx \right]_0^h = -\frac{2}{3} \frac{\rho g}{2\mu} h^3 + Vh = h \left(-\frac{\rho g}{3\mu} h^2 + V \right)\end{aligned}$$

Affinché la portata sia nulla deve, pertanto, essere $V_0 = \rho g h^2 / 3\mu$ e, per un film di olio di spessore 5,0 mm con $\rho = 888 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 0,80 \text{ Pa}\cdot\text{s}$,

$$V_0 = \frac{\rho g}{3\mu} h^2 = \frac{888 \times 9,81}{3 \times 0,80} \times 0,005^2 = 0,0907 \text{ m/s}$$

Discussione Per $V > V_0$ la portata netta, cioè la differenza tra la portata diretta verso l'alto, in prossimità della parete, e quella diretta verso il basso, in prossimità della superficie libera, è positiva, cioè la portata diretta verso l'alto è maggiore di quella diretta verso il basso. L'opposto si ha per valori di V minori di V_0 .

9.47 Si consideri il campo di velocità di un moto permanente tridimensionale

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (axz^2 - by)\mathbf{i} + cxyz\mathbf{j} + (dz^3 + exz^2)\mathbf{k}$$

con a , b , c , d ed e costanti. In quali condizioni il fluido si comporta come incompressibile? Quali sono le dimensioni fondamentali delle costanti?

Analisi Affinché il fluido si possa considerare incompressibile, deve essere soddisfatta l'equazione di continuità nella forma 9.18

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

in qualunque punto del campo di moto, cioè per qualunque valore di x , y , z . Per cui, deve essere

$$az^2 + cxz + 3dz^2 + 2exz = 0$$

che può essere scritta anche come

$$(a + 3d)z^2 + (c + 2e)xz = 0$$

da cui $a = -3d$ e $c = -2e$. Nella relazione che rappresenta il campo di velocità, ciascun termine deve avere le dimensioni di una velocità (lunghezza

su tempo, cioè $[L \cdot T^{-1}]$), per cui

$$[a] = \left[\frac{v}{xz^2} \right] = [L \cdot T^{-1} \cdot L^{-3}] = [L^{-2} \cdot T^{-1}]$$

$$[b] = \left[\frac{v}{y} \right] = [L \cdot T^{-1} \cdot L^{-1}] = [T^{-1}]$$

$$[c] = \left[\frac{v}{xyz} \right] = [L \cdot T^{-1} \cdot L^{-3}] = [L^{-2} \cdot T^{-1}]$$

$$[d] = \left[\frac{v}{z^3} \right] = [L \cdot T^{-1} \cdot L^{-3}] = [L^{-2} \cdot T^{-1}]$$

$$[e] = \left[\frac{v}{xz^2} \right] = [L \cdot T^{-1} \cdot L^{-3}] = [L^{-2} \cdot T^{-1}]$$

9.48 Scrivere l'equazione di Navier-Stokes per un liquido incompressibile *in quiete*. La gravità agisce in direzione $-z$. Partendo dalla forma vettoriale dell'equazione di Navier-Stokes per un fluido incompressibile, spiegare perché alcuni termini possono essere trascurati e scrivere la forma finale dell'equazione.

Analisi L'equazione di Navier-Stokes per un fluido incompressibile 9.59

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

per un liquido in quiete, essendo $\mathbf{v} = 0$ ovunque e $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, diventa

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{k}$$

che, essendo l'asse z verticale e diretto verso l'alto, mostra come la pressione in un fluido in quiete aumenti verso il basso, cioè al diminuire della quota, e sia costante in tutti i punti posti alla stessa quota.

9.49 Scrivere l'equazione di Navier-Stokes per un liquido incompressibile *accelerato come un corpo rigido* in una direzione arbitraria. La gravità agisce in direzione $-z$. Partendo dalla forma vettoriale dell'equazione di Navier-Stokes per un fluido incompressibile, spiegare perché alcuni termini possono essere trascurati e scrivere la forma finale dell'equazione.

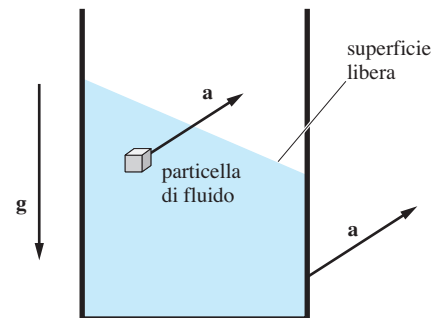
Analisi L'equazione di Navier-Stokes per un fluido incompressibile 9.59

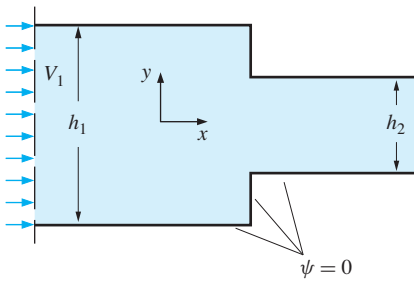
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

per un liquido che si muove come un corpo rigido, essendo $\nabla^2 \mathbf{v} = 0$, perché sono nulli gli scorrimenti relativi all'interno del volume, e $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, diventa

$$\nabla p + \rho g \mathbf{k} = -\rho \mathbf{a}$$

nella quale $\mathbf{a}$ è l'accelerazione a cui è sottoposto il fluido.





9.50 In corrispondenza di un brusco restringimento, l'altezza di un campo di moto permanente bidimensionale di un fluido incompressibile, simulato numericamente, varia da $h_1 = 120$ mm a $h_2 = 46$ mm. Nella sezione di ingresso la velocità, distribuita uniformemente, è $V_1 = 18,5$ m/s. Per la risoluzione numerica delle equazioni è necessario specificare il valore della funzione di corrente sul contorno del dominio. Posto $\psi = 0$ in corrispondenza della parete inferiore, determinare il valore da assegnare a ψ sulla parete superiore, sulla sezione sinistra e sulla sezione destra del contorno.

Analisi Nel moto permanente bidimensionale di un fluido incompressibile, la portata per unità di larghezza è pari alla differenza tra i valori ψ_s e ψ_i che la funzione di corrente assume, rispettivamente, sulle pareti superiore e inferiore. Di conseguenza, la velocità media è pari al rapporto tra tale differenza e la distanza tra le pareti, per cui, nel tratto a monte del restringimento si ha

$$V_1 = \frac{\psi_s - \psi_i}{h_1}$$

da cui

$$\psi_s = \psi_i + V_1 h_1 = 0 + 18,5 \times 0,120 = 2,22 \text{ m}^2/\text{s}$$

Essendo la velocità uniformemente distribuita, ψ varia linearmente nella direzione ortogonale alle linee di flusso, per cui sulla sezione sinistra è

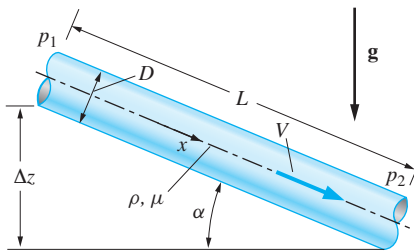
$$\psi_{\text{sin}} = \psi_i + \frac{\psi_s - \psi_i}{h_1} y = \psi_i + V_1 y = 18,5 y$$

relazione che può essere scritta direttamente integrando la prima delle 9.20, per la quale si ha $v_x = V_1 = \partial\psi/\partial y$. Nella sezione destra del contorno, supponendo che essa disti dal restringimento tanto da poter ritenere che la velocità sia distribuita uniformemente, per la conservazione della massa si ha

$$V_2 = V_1 \frac{h_1}{h_2} = 18,5 \times \frac{120}{46} = 48,3 \text{ m/s}$$

e, pertanto, in tale sezione

$$\psi_{\text{des}} = \psi_i + V_2 y = 48,3 y$$



9.51 All'interno di una tubazione di diametro D e lunghezza L , inclinata di α sull'orizzontale, defluisce acqua in moto permanente, in regime laminare. Nelle sezioni di ingresso e di uscita è $p_1 = p_2 = p_a$, per cui l'acqua si muove solo per effetto della gravità. Assunto un sistema di riferimento avente l'asse x coincidente con l'asse della tubazione, scrivere un'espressione della velocità media V in funzione dei parametri assegnati ρ , g , D , Δz , μ e L , utilizzando l'approccio globale, e confrontare il risultato con quello ottenuto nel problema 9.40 usando l'approccio differenziale. Utilizzando l'analisi dimensionale, scrivere un'espressione adimensionale per V in funzione degli stessi parametri e mettere i gruppi Π in relazione tra loro in modo da avere un'espressione che corrisponda all'espressione analitica esatta.

Analisi Con l'approccio globale, per la 5.108, tra la sezione 1 di ingresso e la sezione 2 di uscita, si ha

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_d$$

relazione che, essendo $p_1 = p_2 = 0$ e $V_1 = V_2 = V$ perché la sezione trasversale è costante, diviene

$$z_1 - z_2 = \Delta H_d = JL = \lambda \frac{V^2}{2gD} L$$

In regime laminare si ha $\lambda = 64/\text{Re}$, per cui

$$z_1 - z_2 = \lambda \frac{V^2}{2gD} L = \frac{64\mu}{\rho V D} \frac{V^2}{2gD} L = \frac{32\mu V}{\rho g D^2} L$$

dalla quale, essendo $z_1 - z_2 = L \sin \alpha$,

$$V = \frac{\rho g D^2}{32\mu} \frac{z_1 - z_2}{L} = \frac{\rho g \sin \alpha}{32\mu} D^2$$

e, introducendo il raggio $R = D/2$,

$$V = \frac{\rho g \sin \alpha}{8\mu} R^2$$

espressione identica a quella ottenuta nel problema 9.40, usando l'approccio differenziale.

Utilizzando l'analisi dimensionale, poiché V è funzione di $\rho, g, D, z_1 - z_2, \mu$ ed L , nel problema ci sono 7 parametri. Essendo le dimensioni fondamentali tre (M, L, T), i parametri Π sono $7 - 3 = 4$. Scegliendo le variabili ripetute ρ, g e D , i gruppi Π risultano

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho D \sqrt{gD}}{\mu}$$

$$\Pi_3 = \frac{z_1 - z_2}{D}$$

$$\Pi_4 = \frac{L}{D}$$

e la relazione finale

$$\frac{V}{\sqrt{gD}} = f \left(\frac{\rho D \sqrt{gD}}{\mu}, \frac{z_1 - z_2}{D}, \frac{L}{D} \right)$$

I gruppi ottenuti possono essere combinati tra loro per ottenere una relazione dalla struttura analoga a quella della relazione prima ottenuta, se si scrive

$$\Pi_1 = \frac{\Pi_2 \Pi_3}{32 \Pi_4}$$

che equivale a

$$\frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{1}{32} \frac{\rho D \sqrt{gD}}{\mu} \frac{z_1 - z_2}{L} \frac{D}{L}$$

da cui

$$V = \frac{\rho g D^2}{32\mu L} \frac{z_1 - z_2}{L} = \frac{\rho g \sin \alpha}{32\mu} D^2$$

che coincide con la relazione precedente. La forma finale della relazione, che la sola analisi dimensionale non avrebbe consentito di ottenere, è stata ricavata dal confronto con la relazione nota.

9.52 Scrivere la forma vettoriale delle seguenti equazioni:

(a) equazione di continuità per un fluido incomprimibile;

(b) equazione di continuità per un fluido comprimibile;

(c) equazione di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile.

Per ogni equazione non lineare, precisare quali sono i termini che la rendono tale.

Analisi (a) L'equazione di continuità per un fluido incomprimibile

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

è lineare.

(b) L'equazione di continuità per un fluido comprimibile

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

è non lineare. Il termine che la rende tale è il secondo, che contiene il prodotto del vettore velocità $\mathbf{v}$ e della densità ρ , variabile in quanto il fluido è, per ipotesi, comprimibile.

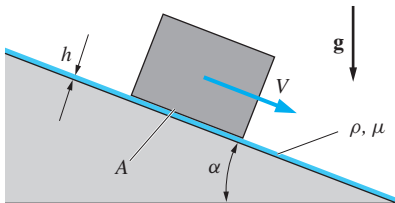
(c) L'equazione di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

è non lineare. Infatti, il termine dell'accelerazione totale $d\mathbf{v}/dt$, che può essere scritto come

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

contiene il prodotto della variabile $\mathbf{v}$ e delle sue derivate, cosa che lo rende non lineare.



9.53 Su una parete piana, inclinata di α sull'orizzontale, un corpo di peso P scivola, con velocità V , su un film sottile, di spessore h , di olio di viscosità μ . Indicando con A l'area della superficie di contatto tra il corpo e il film di olio, scrivere l'espressione analitica esatta dello spessore h incognito, in funzione di V , P , A , α e μ . Utilizzando l'analisi dimensionale, ricavare un'espressione adimensionale di h in funzione dei parametri assegnati e mettere i gruppi Π in relazione tra loro in modo da ottenere l'espressione esatta.

Analisi Per l'equilibrio alla traslazione nella direzione del piano inclinato, deve essere

$$P \sin \alpha = \tau A$$

essendo τ lo sforzo tangenziale che agisce sulla superficie di contatto del corpo con l'olio, che per un moto alla Couette è $\tau = \mu(dv_x/dy) = \mu V/h$. Per cui, si ha

$$h = \frac{\mu V}{\tau} = \frac{\mu V A}{P \sin \alpha}$$

Utilizzando l'analisi dimensionale, poiché h è funzione di V , A , P , α e μ , nel problema ci sono 6 parametri. Essendo le dimensioni fondamentali tre (M, L, T), i parametri Π sono $6 - 3 = 3$. Scegliendo le variabili ripetute V , A e P , i gruppi Π risultano

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{h}{\sqrt{A}} \\ \Pi_2 &= \frac{\mu V \sqrt{A}}{P} \\ \Pi_3 &= \alpha\end{aligned}$$

e la relazione finale

$$\frac{h}{\sqrt{A}} = f\left(\frac{\mu V \sqrt{A}}{P}, \alpha\right)$$

I gruppi ottenuti possono essere combinati tra loro per ottenere una relazione dalla struttura analoga a quella della relazione ottenuta prima, se si scrive

$$\Pi_1 = \frac{\Pi_2}{\sin \Pi_3}$$

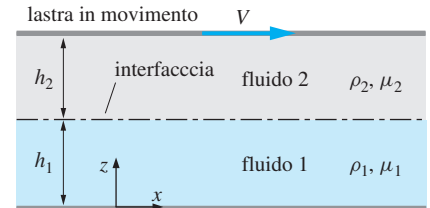
che equivale a

$$\frac{h}{\sqrt{A}} = \frac{\mu V \sqrt{A}}{P} \frac{1}{\sin \alpha}$$

da cui

$$h = \frac{\mu V A}{P \sin \alpha}$$

9.54 L'intercapedine tra due lastre piane parallele orizzontali indefinite contiene due liquidi non miscibili tra loro. La lastra inferiore è ferma, mentre quella superiore si muove con velocità costante V . A causa degli effetti viscosi determinati dal moto della lastra superiore si genera un moto alla Couette. I liquidi possono essere considerati incompressibili e il loro moto permanente, unidimensionale e laminare. In corrispondenza della lastra inferiore ($z = 0$) la pressione vale p_0 . (a) Elencare le sei condizioni al contorno per la velocità e la pressione. (b) Scrivere l'espressione della velocità, suddividendo il dominio in due porzioni in corrispondenza dei due fluidi e esprimendo separatamente $v_1(z)$, per il primo fluido, e $v_2(z)$, per il secondo. (c) Scrivere l'espressione del campo di pressione. (d) Ipotizzando che il fluido 1 sia acqua e il fluido 2 olio motore, entrambi a 80 °C, e che sia $h_1 = 5,0$ mm, $h_2 = 8,0$ mm e $V = 10,0$ m/s, tracciare il profilo di velocità e discutere i risultati.



Analisi (a) *Condizioni al contorno.* Per la condizione di aderenza alle pareti, si ha: per $z = 0$

$$v_x = 0 \quad (1)$$

e per $z = h_1 + h_2$

$$v_x = V \quad (2)$$

All'interfaccia, velocità e sforzo tangenziale sono uguali per ambedue i fluidi, per cui per $z = h_1$

$$v_{x1} = v_{x2} \quad (3)$$

e

$$\mu_1 \frac{dv_{x1}}{dz} = \mu_2 \frac{dv_{x2}}{dz} \quad (4)$$

In corrispondenza della lastra inferiore la pressione ha il valore assegnato, per cui per $z = 0$

$$p_1 = p_0 \quad (5)$$

mentre all'interfaccia deve avere lo stesso valore per ambedue i fluidi, per cui per $z = h_1$

$$p_1 = p_2 \quad (6)$$

(b) *Espressione della velocità.* Seguendo la procedura di Fig. 9.31, si ha:

Fase 1 *Definizione del problema e della geometria:* vedi figura.

Fase 2 *Posizione delle ipotesi e delle condizioni al contorno.* *Ipotesi:* 1. Il moto è bidimensionale nel piano verticale xz , da cui $v_y = 0$ e la velocità è diretta come l'asse x , da cui $v_z = 0$. 2. I fluidi sono incompressibili e newtoniani, in moto permanente laminare. 3. La pressione p è costante con x . *Condizioni al contorno:* vedi punto (a).

Fase 3 *Semplificazione delle equazioni.* Essendo $v_y = v_z = 0$, l'equazione di continuità 9.60a diviene

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

per cui v_x non è funzione di x . In altre parole, il profilo di velocità è lo stesso per qualunque valore di x , cioè il moto è *uniforme*. Quindi, per l'ipotesi 1, v_x è funzione solo di z . Essendo $\partial v_x / \partial t = 0$ per l'ipotesi di moto permanente, $\partial v_x / \partial x = 0$ per la continuità, $v_y = v_z = 0$, $g_x = 0$, $\partial p / \partial x = 0$ per l'ipotesi 3 e $\partial^2 v_x / \partial x^2 = 0$ per la continuità, l'equazione del moto 9.60b in direzione x

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \\ &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

diviene

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0$$

in cui la derivata parziale è diventata una derivata totale perché v_x è funzione della sola z . Analogamente, l'equazione 9.60d in direzione z , essendo l'asse z positivo verso l'alto per cui $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ e $g_z = -g$, diviene

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

in cui la derivata parziale è diventata una derivata totale perché, per l'ipotesi 3, p è funzione solo di z .

Fase 4 *Risoluzione delle equazioni differenziali.* Integrando due volte la 9.60b si ottiene

$$v_{x1} = C_1 z + C_2 \quad (7)$$

$$v_{x2} = C_3 z + C_4 \quad (8)$$

valide rispettivamente nello strato di fluido 1 e nello strato di fluido 2, nelle quali C_1 , C_2 , C_3 e C_4 sono delle costanti di integrazione. Analogamente, integrando la 9.60d, si ha

$$p_1 = -\rho_1 g z + C_5 \quad (9)$$

$$p_2 = -\rho_2 g z + C_6 \quad (10)$$

Fase 5 *Applicazione delle condizioni al contorno.* Dalle prime quattro condizioni al contorno si ottiene il sistema di equazioni

$$C_2 = 0$$

$$V = C_3(h_1 + h_2) + C_4$$

$$C_1 h_1 = C_3 h_1 + C_4$$

$$\mu_1 C_1 = \mu_2 C_3$$

la cui soluzione fornisce

$$C_1 = \frac{\mu_2 V}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{\mu_1 V}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2}$$

$$C_4 = V \left(\frac{\mu_2 h_1 - \mu_1 h_1}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} \right)$$

e, sostituendo nella (7) e nella (8),

$$v_{x1} = \frac{\mu_2 V}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} z$$

$$\begin{aligned} v_{x2} &= \frac{\mu_1 V}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} z + V \left(\frac{\mu_2 h_1 - \mu_1 h_1}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} \right) = \\ &= \frac{V}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} [\mu_1 (z - h_1) + \mu_2 h_1] \end{aligned}$$

(c) *Espressione del campo di pressione.* Dalle condizioni al contorno 5 e 6, si ottengono le costanti

$$C_5 = p_0$$

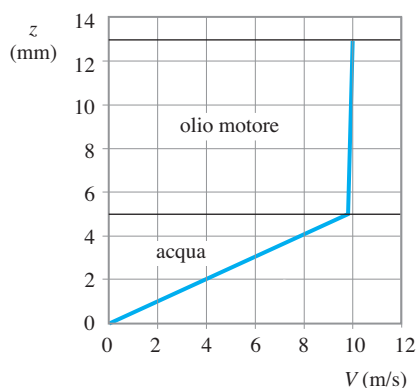
$$C_6 = p_0 - g h_1 (\rho_1 - \rho_2)$$

che introdotte, rispettivamente, nella 9 e nella 10 forniscono

$$p_1 = p_0 - \rho_1 g z$$

$$p_2 = p_0 - g h_1 (\rho_1 - \rho_2) - \rho_2 g z$$

(d) *Distribuzione della velocità.* Alla temperatura di 80 °C la densità e la viscosità dell'acqua valgono, rispettivamente, $\rho_1 = 972 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_1 = 0,355 \times$



$10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Alla stessa temperatura, per l'olio motore, si ha $\rho_2 = 852 \text{ kg/m}^3$ e $\mu_2 = 32,0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Ambedue i profili di velocità, tracciati nella figura a fianco, sono lineari. A causa dell'alta viscosità dell'olio motore, la velocità nello strato superiore è praticamente costante.

Discussione La distribuzione della pressione è di tipo idrostatico perché p è funzione lineare della sola z . Per la stabilità dell'equilibrio, il baricentro del sistema deve essere quanto più in basso possibile. Pertanto, lo strato superiore deve essere più leggero di quello inferiore. Quindi, l'olio motore, avendo densità minore di quella dell'acqua, si dispone superiormente e l'acqua inferiormente.

maggio 2011