1

Data $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int dx\, h(x) \neq 0$, si consideri la successione

$$u_n(x) = \frac{nh(nx)}{\int dx\, h(x)} \ .$$

Si mostri che $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \delta(x)$ nel senso delle distribuzioni, dove $\delta(x)$ denota la delta di Dirac (o equivalentemente usando la notazione dei funzionali, che $\lim_{n\to\infty} T_{u_n} = \delta_0$).

2

Trova le rispettive soluzioni delle due seguenti equazioni integrali per la funzione incognita $g(t)$, usando la trasformata di Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t')g(t-t') = \frac{T}{\pi}\frac{1}{t^2+T^2} \ ,$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t')e^{-\frac{\pi(t-t')^2}{T^2}} = -g(t) + e^{-\frac{\pi t^2}{T^2}} \ .$$