

Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 11 - Limiti e studio di funzione - 03/12/2024

Richiamo - studio di funzione

Data la funzione $f(x)$, per studiarla determiniamo

- i) Domínio $\text{dom } f$ (ricordando quando le varie funzioni elementari sono ben definite...)
- ii) Segno, ovvero per quali $x \in \text{dom } f$ si ha $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) = 0$.
Se $0 \in \text{dom } f$, è utile valutare l'intersezione con l'asse y calcolando $f(0)$.
Può essere utile verificare eventuali simmetrie di f
 $\hookrightarrow$ se $f(-x) = f(x)$, f è pari (sim. rispetto asse y); se $f(-x) = -f(x)$, f è dispari (sim. rispetto origine)
- iii) Limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui.
In alcuni casi particolari (ad esempio se f è definita a tratti) dobbiamo anche identificare eventuali punti di discontinuità.
 $\hookrightarrow$ N.B. x_0 può essere punto di discontinuità solo se $x_0 \in \text{dom } f$. Ad esempio il punto $x_0 = 0$ non è punto di discontinuità di $f(x) = \frac{1}{x}$, perché $0 \notin \text{dom } f$ (è vero però che $x=0$ è as. verticale)
- iv) Derivata prima $f'(x)$, ed eventuali punti di non derivabilità ($\in \text{dom } f$) in cui f' non è ben definita. È utile calcolare limite destro e sinistro nei punti di non derivabilità per capire se sono punti angolosi, cuspidi, o punti a tangente verticale.
 $\hookrightarrow$ N.B. Tenere sempre in mente che $f'(x_0)$ è la pendenza della retta tangente a $f(x_0)$.
 $\hookrightarrow$ cioè il coeff. angolare
Segno di f' . Dove $f'(x) > 0 \rightarrow f$ è crescente, dove $f'(x) < 0 \rightarrow f$ è decrecente
dove $f'(x) = 0 \rightarrow f$ ha punto a tangente orizzontale, che spesso (ma non sempre, ad. $f(x) = x^3$) è max. o min. locale. Tenere in mente che anche i punti di non derivabilità possono essere max. o minimi locali (è il segno di f' che conta!) $\rightarrow$ valutare f nei max. e min. locali!

Se presenti, determinare max. e min. globali di f , confrontando max. e min. locali e i limiti agli estremi del dominio.

v) Derivata seconda $f''(x)$ e suo segno. Dove $f''(x) > 0 \rightarrow f$ è convessa, dove $f''(x) < 0 \rightarrow f$ è concava, dove $f''(x) = 0 \rightarrow f$ ha un flesso, ovvero cambia di concavità.
 $\rightarrow$ a meno che f non sia una retta...

vi) Grafico qualitativo di f , in cui risultino Tutte le informazioni Trovate ai punti precedenti.

N.B. I punti ii) e v) (segno, intersezioni, simmetrie, derivata seconda) non sempre vengono richieste.

ESERCIZI

Es. 1

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x-4}{x+8+|4-x|}$

Es. 2

Calcolare i seguenti limiti con la regola di de l'Hopital

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin 2x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 3^x)}{x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3^x}$

v) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}}$

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$

Es. 3 (5/02/2024, D)

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tanh x) - 1}{\log(1+x^2)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + e}{[\log(e^x + 1)]^3}$

Es. 4 (15/09/2024)

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sinh x) - \cosh(\arcsin x)}{7 \arctan(x^2)}$

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n+1} \left(\pi - 2 \arctan(n) \right)$

SVOLGIMENTI

Es. 1

$$f(x) = \frac{x-4}{x+8+|4-x|} = \begin{cases} \frac{x-4}{\cancel{x}+8+4-\cancel{x}} & \text{se } x \leq 4 \\ \frac{x-4}{x+8-4+x} & \text{se } x > 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{12} - \frac{1}{3} & \text{se } x \leq 4 \\ \frac{x-4}{2x+4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

→ ci rendiamo già conto che f è una retta per $x \leq 4$ e un'iperbole per $x > 4$, quindi potremmo già abbozzare un grafico... ma seguiamo tutti i passaggi.

i) Domínio

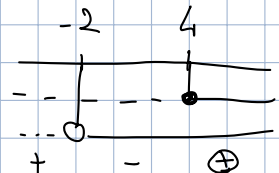
- Per $x \leq 4$ f è ben definita.
- Per $x > 4$ richiediamo $2x+4 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$, ma $-2 \notin (4, +\infty)$ quindi f è ben definita anche per $x > 4$.

$$\Rightarrow \underline{\text{dom } f = \mathbb{R}}$$

ii) Segno / inters.

- $x \leq 4$: $f(x) = \frac{x}{12} - \frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

$$\Rightarrow \underline{f(x) < 0 \text{ per } x < 4} \text{ e } \underline{f(4) = 0} \text{ . Inoltre } \underline{f(0) = -\frac{1}{3}}.$$

- $x > 4$: $\frac{x-4}{2x+4} \geq 0 \Leftrightarrow$  $\Rightarrow \underline{f(x) > 0 \text{ per } x > 4}$

iii) Limiti / asintoti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{12}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{x}{12} \right] = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{y = \frac{x}{12} - \frac{1}{3}} \text{ è as. obliquo a } -\infty \text{ (che coincide con } f \text{ stessa per } x \leq 4 \text{ !)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{y = \frac{1}{2} \text{ è as. orizzontale a } +\infty.}$$

iv) Derivata / derivabilità / crescita / max. e min.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{se } x < 4 \\ \frac{2x+4 - 2(x-4)}{(2x+4)^2} & \text{se } x > 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{se } x < 4 \\ \frac{12}{(2x+4)^2} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

f è derivabile in $x = 4$? Calcoliamo limite destro e sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{12}{(2x+4)^2} = \frac{12}{12^2} = \frac{1}{12}$$

→ sono finiti e coincidono, dunque

$$\exists \lim_{x \rightarrow 4} f'(x) \Rightarrow \underline{f \text{ è derivabile in } x = 4.}$$

↓
devo farlo vedere nel grafico!

Risulta inoltre $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{f \text{ strettamente crescente } \forall x \in \mathbb{R}.}$

Concludiamo infine che f non ha né max. né min. locali o globali, e che $\frac{1}{2}$ è estremo superiore di f .

v) Derivata seconda / concavità / flessi

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ 12 \cdot \frac{-2}{(2x+4)^3} \cdot 2 & x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ -\frac{48}{(2x+4)^3} & x > 4 \end{cases}$$

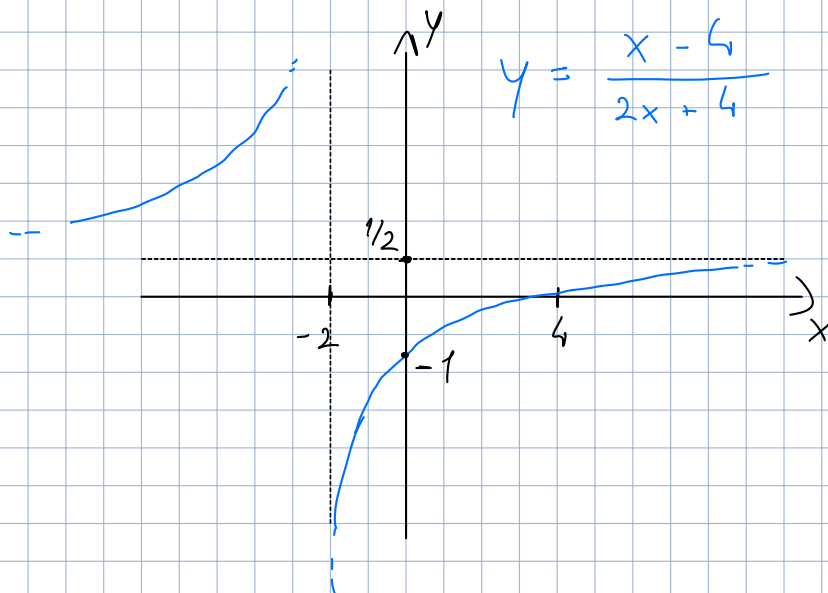
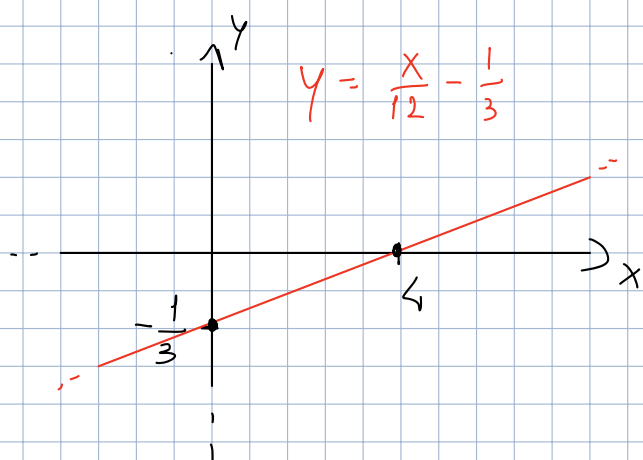
una retta è sia concava che convessa, ma non strettamente...

$$f''(x) = 0 \text{ per } x < 4, \quad f''(x) < 0 \text{ per } x > 4 \Rightarrow \underline{f \text{ concava } \forall x \in \mathbb{R} \text{ (no flessi)}}$$

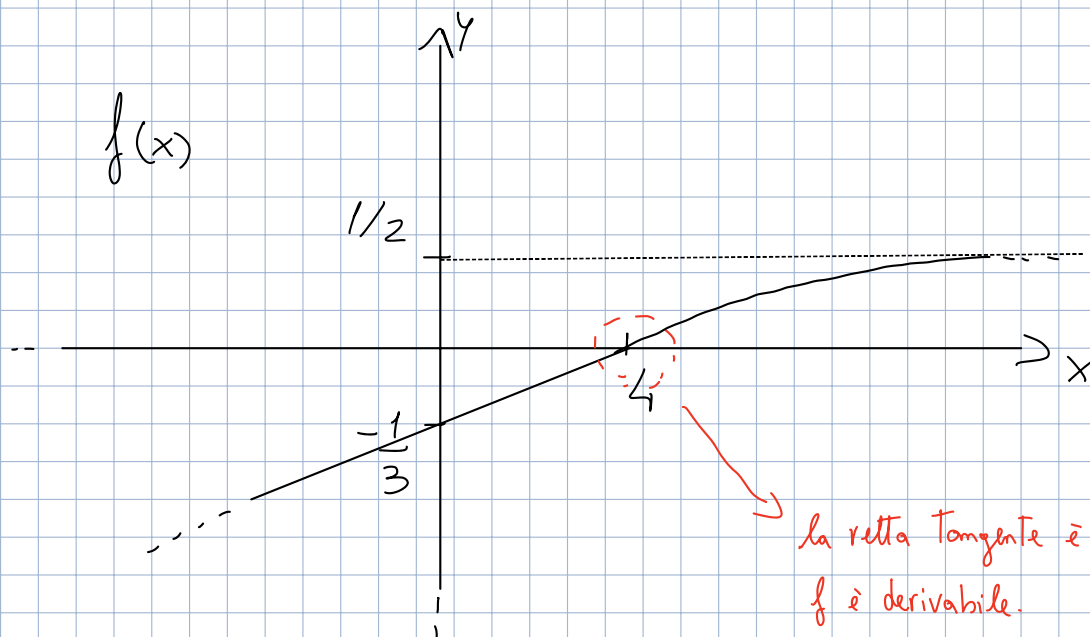
Notiamo che $\lim_{x \rightarrow 4^+} f''(x) \neq 0$, dunque f'' non è ben definita in $x = 4$, ma questo non viene generalmente richiesto e non è necessario farlo vedere dal grafico...

vi) Grafico qualitativo

↳ facile, perché sappiamo disegnare rette e iperboli. La cosa importante da far vedere è che i 2 pezzi si raccordano con derivabilità (no punti angolosi!) in $x=4$.



Dunque f è la retta per $x \leq 4$ e l'iperbole per $x > 4$



Es. 2

per indicare che applichiamo l'Hopital, dunque scriviamo le derivate

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin 2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{1 + \sin x}}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

non più forma indeterminata, basta sostituire

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 3^x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi 3^x) \cdot \pi \cdot \log 3 \cdot 3^x}{1} = \cos(\pi) \cdot \pi \cdot \log 3 \cdot 1 = -\pi \log 3$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\log(e^x + x)}{x}}$$

$$\text{Calcoliamo il limite dell'esponente: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e^x + x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\log(1+3x)) \cdot \frac{3}{1+3x}}{e^x - \log 3 \cdot 3^x} = \frac{\cos 0 \cdot \frac{3}{1}}{1 - \log 3} = \frac{3}{1 - \log 3}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$vi) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Es. 3

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\tanh x) - 1}{\log(1+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{\cos(\tanh x) - 1}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{x^2}{\log(1+x^2)}}_{t=x^2} \cdot \underbrace{\frac{\cos(\tanh x) - 1}{\tanh^2 x}}_{t=\tanh x} \cdot \underbrace{\left(\frac{\tanh x}{x}\right)^2}_{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1} \right] = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + e}{[\log(e^x + 1)]^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + e}{[x + \log(1+e^{-x})]^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} \left(3 + \frac{e}{x^3} \right)}{\cancel{x^3} \left[1 + \frac{\log(1+e^{-x})}{x} \right]^3} = 3 \end{aligned}$$

$\log(e^x + 1)$
 $= \log(e^x(1+e^{-x}))$
 $= \log(e^x) + \log(1+e^{-x})$

$\rightarrow 0$ $\rightarrow 0$

Es. 4

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sinh x) - \cosh(\operatorname{arcsinh} x)}{7 \operatorname{arctan}(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{7 \operatorname{arctan}(x^2)} \cdot \frac{\cos(\sinh x) - \cosh(\operatorname{arcsinh} x)}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{\operatorname{arctan}(x^2)} \cdot \left(\frac{\cos(\sinh x) - 1}{x^2} - \frac{\cosh(\operatorname{arcsinh} x) - 1}{x^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{x^2}{\operatorname{arctan}(x^2)}}_{\rightarrow 1} \cdot \left(\underbrace{\frac{\cos(\sinh x) - 1}{\sinh^2 x}}_{\rightarrow -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sinh^2 x}{x^2}}_{\rightarrow 1} - \underbrace{\frac{\cosh(\operatorname{arcsinh} x) - 1}{\operatorname{arcsinh}^2 x}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{arcsinh}^2 x}{x^2}}_{\rightarrow 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n+1} \left(\pi - 2 \operatorname{arctan}(n) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{n+1} \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$$

il Testo ci consiglia la formula
 $\operatorname{arctan}(x) + \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{arctan}(n) = \pi - 2 \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{n+1} \cdot \frac{\operatorname{arctan}(1/n)}{1/n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{n^2+n} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{arctan}(1/n)}{1/n}}_{\rightarrow 1} = 4$$

perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctan} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$