

Calcolo integrale: esercizi svolti

1	Integrali semplici	2
2	Integrazione per parti	3
3	Integrazione per sostituzione	4
4	Integrazione delle funzioni razionali fratte	5
5	Integrazione con sostituzioni speciali	10
6	Integrazione di funzioni definite a tratti	11
7	Integrali definiti	13
8	Altri esercizi	15

1 Integrali semplici

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$(a) \quad \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx \quad [\log |x + \sin x| + c, \quad c \in \mathbb{R}]$$

$$(b) \quad \int \frac{3x + 2}{x^2 + 1} dx \quad \left[\frac{3}{2} \log(x^2 + 1) + 2 \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}. \quad [\tan x - \cot x + c, \quad c \in \mathbb{R}]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx.$$

Poichè $1 + \cos x$ è la derivata di $x + \sin x$, si ha che

$$\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx = \log |x + \sin x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 + 1} dx.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 2}{x^2 + 1} dx &= \int \left(\frac{3x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \log(x^2 + 1) + 2 \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Poichè $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, si ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \\ &= \tan x - \cot x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 Integrazione per parti

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$(a) \quad \int \arcsin x \, dx \qquad \qquad \qquad \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(b) \quad \int x^2 \log^2 x \, dx \qquad \qquad \qquad \left[\frac{1}{3} x^3 \left(\log^2 x - \frac{2}{3} \log x + \frac{2}{9} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad \int x^3 \sqrt{2-x^2} \, dx. \qquad \qquad \qquad \left[-\frac{1}{3} x^2 (2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} (2-x^2)^{\frac{5}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \arcsin x \, dx.$$

Integrando per parti si ha che

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int (x \log x)^2 \, dx = \int x^2 \log^2 x \, dx.$$

Integrando due volte per parti si ha che

$$\begin{aligned} \int x^2 \log^2 x \, dx &= \frac{1}{3} x^3 \log^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \log x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{9} \int x^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 + c = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \left(\log^2 x - \frac{2}{3} \log x + \frac{2}{9} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int x^3 \sqrt{2-x^2} dx = \int x^2 (x \sqrt{2-x^2}) dx.$$

Integrando per parti si ha che

$$\begin{aligned} \int x^2 (x \sqrt{2-x^2}) dx &= -\frac{1}{3} x^2 (2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \int x (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \\ &= -\frac{1}{3} x^2 (2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} (2-x^2)^{\frac{5}{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3 Integrazione per sostituzione

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, utilizzando la formula di integrazione per sostituzione:

$$(a) \quad \int \frac{dx}{x \log^3 x} \quad \left[-\frac{1}{2 \log^2 x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(b) \quad \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \left[\log(1 + \sin^2 x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}. \quad \left[2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \log(\sqrt[6]{x} + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x \log^3 x}.$$

Posto $t = \log x$ si ha che $dt = \frac{1}{x} dx$. Quindi

$$\int \frac{dx}{x \log^3 x} = \int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + c = -\frac{1}{2 \log^2 x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Posto $t = \sin x$ si ha che $dt = \cos x dx$. Quindi

$$\int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{2t}{1 + t^2} dt = \log(1 + t^2) + c = \log(1 + \sin^2 x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Posto $x = t^6$, si ha che $dx = 6t^5 dt$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int \frac{t^3}{t + 1} dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \log |t + 1| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \log(\sqrt[6]{x} + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali fratte:

$$(a) \quad \int \frac{x + 1}{x(1 + x^2)} dx \quad \left[\log \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} + \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(b) \quad \int \frac{1}{x^3(1 + x^2)} dx \quad \left[\log \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} - \frac{1}{2x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad \int \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + x - 6} dx \quad \left[\frac{1}{2}x^2 + 2 \log |x - 2| + 3 \log |x + 3| + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(d) \quad \int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 3)} \quad \left[\log \sqrt[6]{\frac{x^2}{x^2 + 2x + 3}} - \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(e) \quad \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx. \quad \left[\log \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} - \frac{13}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x+1}{x(1+x^2)} dx.$$

Si ha che

$$\frac{x+1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)} \implies \begin{cases} A = C = 1 \\ B = -1. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x(1+x^2)} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1-x}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \log|x| + \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ &= \log|x| + \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c = \\ &= \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3(1+x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Dx+E}{x^2} \right) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} - \frac{Dx+2E}{x^3} = \\ &= \frac{(A+B)x^4 + (C-D)x^3 + (A-2E)x^2 - Dx - 2E}{x^3(1+x^2)} \implies \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = D = 0 \\ E = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx &= \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \right] dx = \\
 &= -\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \int \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) dx = \\
 &= -\log|x| + \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{2x^2} + c = \\
 &= \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} - \frac{1}{2x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + x - 6} dx.$$

Eseguendo la divisione fra i polinomi si ha che

$$\frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + x - 6} = x + \frac{5x}{x^2 + x - 6}.$$

Quindi

$$\int \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + x - 6} dx = \int \left(x + \frac{5x}{x^2 + x - 6} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{5x}{(x-2)(x+3)} dx.$$

Si ha che

$$\frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + 3A - 2B}{(x-2)(x+3)} \implies \begin{cases} A = 2 \\ B = 3. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + x - 6} dx &= \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{5x}{(x-2)(x+3)} dx = \\
 &= \frac{1}{2}x^2 + \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2}x^2 + 2 \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x+3} dx = \\
 &= \frac{1}{2}x^2 + 2 \log|x-2| + 3 \log|x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

(d) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 3)}.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2 + 2x + 3)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 3} = \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (2A + C)x + 3A}{x(x^2 + 2x + 3)} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 3)} &= \int \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{3} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \log |x| - \frac{1}{6} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \log |x| - \frac{1}{6} \log (x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \\ \text{essendo } x^2 + 2x + 3 &= (x + 1)^2 + 2 = 2 \left[\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right], \text{ si ha che} \\ &= \frac{1}{3} \log |x| - \frac{1}{6} \log (x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{6} \int \frac{1}{\left[\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]} dx = \end{aligned}$$

posto $t = \frac{x + 1}{\sqrt{2}}$, si ha che $dt = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$, quindi

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \log |x| - \frac{1}{6} \log (x^2 + 2x + 3) - \frac{\sqrt{2}}{6} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{3} \log |x| - \frac{1}{6} \log (x^2 + 2x + 3) - \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan t + c = \\ &= \frac{1}{3} \log |x| - \frac{1}{6} \log (x^2 + 2x + 3) - \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + c = \\ &= \log \sqrt[6]{\frac{x^2}{x^2 + 2x + 3}} - \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(e) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2 - 10x + 10}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)} dx.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5} = \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (2A + C)x + 5A}{x(x^2 + 2x + 5)} \implies \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = -14. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)} dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{x + 14}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} - \frac{13}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \\ &= 2 \log |x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx - 13 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \\ &= 2 \log |x| - \frac{1}{2} \log (x^2 + 2x + 5) - 13 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx. \end{aligned}$$

Poichè

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = 4 \left[\left(\frac{x + 1}{2} \right)^2 + 1 \right],$$

si ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{1}{4 \left[\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right]} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)} dx &= 2 \log |x| - \frac{1}{2} \log (x^2 + 2x + 5) - 13 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \\ &= 2 \log |x| - \frac{1}{2} \log (x^2 + 2x + 5) - \frac{13}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + c = \\ &= \log \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} - \frac{13}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5 Integrazione con sostituzioni speciali

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti utilizzando la formula di integrazione per sostituzione:

$$(a) \quad \int \frac{1}{\sin x} dx \qquad \left[\log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(b) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} \qquad \left[-\frac{1}{x^2 + x\sqrt{x^2+4}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}. \qquad \left[\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Posto $t = \tan \frac{x}{2}$ si ha che $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Poichè $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, si ha che

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + c = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}.$$

Posto $x = 2 \sinh t$, quindi $t = \operatorname{settsinh} \frac{x}{2} = \log \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2+4} \right)$, da cui $dx = 2 \cosh t dt$, si ha che

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sinh^2 t} dt = \int \frac{e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2} dt.$$

Posto $z = e^t$, cioè $z = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2+4}$, da cui $dz = e^t dt$, si ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2} dt = \int \frac{z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{1}{2} \frac{1}{z^2-1} + c = \\ &= -\frac{1}{x^2 + x\sqrt{x^2+4}} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

Posto $x-1 = \sqrt{2} \sin t$, per $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si ha che $t = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ e $dx = \sqrt{2} \cos t dt$. Quindi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \int dt = t + c = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

6 Integrazione di funzioni definite a tratti

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni definite a tratti:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} e^x(x-1) + c & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x + c & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} -x^3 \sin(\pi + \pi x^2) & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 8x + 7 & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad \left[\begin{cases} -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x^2) + c & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{3} x^3 - 4x^2 + 7x + c + \frac{1}{2\pi} - \frac{10}{3} & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determiniamo una generica primitiva F di f su $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c_1 = e^x(x-1) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + c_1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x + c_2 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che la generica primitiva F è continua in 0. Quindi deve essere

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x).$$

Poichè

$$F(0) = c_1 - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = c_2 - 1,$$

si ha che $c_1 = c_2$. Quindi, posto $c = c_1$, si ha che una generica primitiva di f è

$$F(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + c & \text{se } x \leq 0 \\ -\cos x + c & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 \sin(\pi + \pi x^2) & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 8x + 7 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determiniamo una generica primitiva F di f su $\mathbb{R}$. Si ha che

$$-\int x^3 \sin(\pi + \pi x^2) dx = \int x^3 \sin(\pi x^2) dx = \int x (x^2 \sin(\pi x^2)) dx =$$

integrando per parti

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{\pi} \int x \cos(\pi x^2) dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x^2) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\int (x^2 - 8x + 7) dx = \frac{1}{3} x^3 - 4x^2 + 7x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x^2) + c_1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{3} x^3 - 4x^2 + 7x + c_2 & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che la generica primitiva F è continua in 1. Quindi deve essere

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x).$$

Poichè

$$F(1) = c_1 + \frac{1}{2\pi}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = c_2 + \frac{10}{3},$$

si ha che

$$c_2 = c_1 + \frac{1}{2\pi} - \frac{10}{3}.$$

Quindi, posto $c = c_1$, si ha che una generica primitiva di f è

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}x^2 \cos(\pi x^2) + \frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x^2) + c & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + c + \frac{1}{2\pi} - \frac{10}{3} & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}.$$

7 Integrali definiti

Esercizio. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$(a) \quad \int_0^\pi |6x - \pi| \sin x \, dx \quad [6\pi - 6]$$

$$(b) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x + 3}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 3)} \cos x \, dx \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{6} \pi - 2 \log 2 \right]$$

$$(c) \quad \int_e^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x(1 - \sqrt{\log x - 1})} \, dx. \quad \left[-\sqrt{2} - 2 \log \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

Svolgimento

(a) Consideriamo l'integrale definito

$$\int_0^\pi |6x - \pi| \sin x \, dx.$$

Si ha che

$$\int_0^\pi |6x - \pi| \sin x \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (6x - \pi) \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^\pi (6x - \pi) \sin x \, dx =$$

integrando per parti

$$\begin{aligned} &= \left[(6x - \pi) \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx + \left[-(6x - \pi) \cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^\pi + 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^\pi \cos x \, dx = \\ &= \pi - 6 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + 5\pi + 6 \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^\pi = 6\pi - 6. \end{aligned}$$

(b) Consideriamo l'integrale definito

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 3}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 3)} \cos x \, dx.$$

Posto $t = \sin x$, da cui $dt = \cos x \, dx$, si ha che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 3}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 3)} \cos x \, dx = \int_{-1}^0 \frac{2t^2 + 3t + 3}{(t - 1)(t^2 + 3)} dt.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{2t^2 + 3t + 3}{(t - 1)(t^2 + 3)} &= \frac{A}{t - 1} + \frac{Bt + C}{t^2 + 3} = \frac{(A + B)t^2 + (-B + C)t + 3A - C}{(t - 1)(t^2 + 3)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{2t^2 + 3t + 3}{(t - 1)(t^2 + 3)} dt &= \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{t - 1} + \frac{3}{t^2 + 3} \right) dt = \\ &= 2 \left[\log |t - 1| \right]_{-1}^0 + \sqrt{3} \int_{-1}^0 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} dt = \\ &= -2 \log 2 + \sqrt{3} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^0 = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi - 2 \log 2. \end{aligned}$$

(c) Consideriamo l'integrale definito

$$\int_e^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x(1 - \sqrt{\log x - 1})} dx.$$

Posto $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x} dx$, si ha che

$$\int_e^{e^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{x(1 - \sqrt{\log x - 1})} dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1 - \sqrt{t - 1}} dt.$$

Posto $y = \sqrt{t - 1}$, da cui $t = y^2 + 1$ e quindi $dt = 2y dy$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1 - \sqrt{t - 1}} dt &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{1 - y} dy = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 - y} \right) dy = \\ &= 2 \left[-y - \log |1 - y| \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} - 2 \log \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

8 Altri esercizi

Esercizio 1. Scrivere lo sviluppo di McLaurin arrestato al sesto ordine della funzione

$$f(x) = \arctan x \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Svolgimento

È ben noto che se g è una funzione continua definita in un intorno di 0 e se $\alpha > 0$, allora

$$g(x) = o(|x|^\alpha), \quad x \rightarrow 0 \quad \implies \quad \int_0^x g(t) dt = o(|x|^{\alpha+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Quindi utilizzando gli sviluppi di McLaurin delle funzioni $\arctan x$ e e^s si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) \right) \cdot \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^4) \right) dt = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) \right) \cdot \left(\left[t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{10}t^5 \right]_0^x + o(x^5) \right) = \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) \right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5) \right) = \\ &= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{37}{90}x^6 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ne segue che lo sviluppo di McLaurin arrestato al sesto ordine di f è

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{37}{90}x^6 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0.$$

Esercizio 2. Scrivere lo sviluppo di McLaurin arrestato al nono ordine della primitiva della funzione

$$f(x) = \cos 2x^2$$

che si annulla in $x = 0$.

Svolgimento

Essendo f continua, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \cos 2t^2 dt$ è la primitiva di f che si annulla in $x = 0$. Inoltre, è ben noto che se g è una funzione continua definita in un intorno di 0 e se $\alpha > 0$, allora

$$g(x) = o(|x|^\alpha), \quad x \rightarrow 0 \quad \implies \quad \int_0^x g(t) dt = o(|x|^{\alpha+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

Quindi utilizzando lo sviluppo di McLaurin della funzione $\cos s$ si ottiene

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \cos 2t^2 dt = \int_0^x \left(1 - 2t^4 + \frac{2}{3}t^8 + o(t^8) \right) dt = \\ &= \left(\left[t - \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{27}t^9 \right]_0^x + o(x^9) \right) = x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{27}x^9 + o(x^9), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ne segue che lo sviluppo di McLaurin arrestato al sesto ordine di F è

$$F(x) = x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{27}x^9 + o(x^9), \quad x \rightarrow 0.$$

Esercizio 3. Calcolare l'area delle seguenti regioni di piano:

$$(a) \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1 - \log^2 x)} \right\} \quad \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \log 2}{1 - \log 2} \right) \right]$$

$$(b) \quad B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{5} \leq x \leq -1, \frac{x}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} \leq y \leq 0 \right\} \quad \left[\log 3 - \frac{2}{3} \right]$$

$$(c) \quad C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e, \frac{\log x}{x\sqrt{4 + 3\log^2 x}} \leq y \leq x^2 \right\}. \quad \left[\frac{1}{3} (e^3 + 1 - \sqrt{7}) \right]$$

Svolgimento

(a) Posto $f(x) = \frac{1}{x(1 - \log^2 x)}$, osserviamo che per $1 \leq x \leq 2$ si ha che $f(x) \geq 0$. Quindi l'area di A è data da

$$\text{Area}_A = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x(1 - \log^2 x)} dx.$$

Posto $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x} dx$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x(1 - \log^2 x)} dx &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\log 2} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\log |1 - t| + \log |1 + t| \right]_0^{\log 2} = \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) \right]_0^{\log 2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \log 2}{1 - \log 2} \right). \end{aligned}$$

Quindi l'area di A è $\text{Area}_A = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \log 2}{1 - \log 2} \right)$.

- (b) Posto $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}}$, osserviamo che per $-\sqrt{5} \leq x \leq -1$ si ha che $f(x) \leq 0$. Quindi l'area di B è data da

$$\text{Area}_B = - \int_{-\sqrt{5}}^{-1} f(x) dx = - \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \frac{x}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} dx =$$

posto $t = \sqrt{x^2 - 1}$, da cui $x^2 = t^2 + 1$ e $x dx = t dt$,

$$\begin{aligned} &= - \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \frac{x}{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} dx = - \int_2^0 \frac{t}{(t+1)^2} dt = - \int_2^0 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \\ &= - \left[\log |t+1| + \frac{1}{(t+1)} \right]_2^0 = \log 3 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Quindi l'area di B è $\text{Area}_B = \log 3 - \frac{2}{3}$.

- (c) Posto $f(x) = \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}}$, osserviamo che per $1 \leq x \leq e$ si ha che $f(x) \leq x^2$. Infatti,

$$\frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}} \leq x^2 \iff \frac{\log x}{\sqrt{4+3\log^2 x}} \leq x^3$$

e le funzioni $g(x) = \frac{\log x}{\sqrt{4+3\log^2 x}}$ e $h(x) = x^3$ sono crescenti nell'intervallo $[1, e]$ con $0 \leq g(x) \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$, $1 \leq h(x) \leq e^3$ per ogni $x \in [1, e]$. Ne segue che $g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in [1, e]$, cioè $f(x) \leq x^2$ per ogni $x \in [1, e]$. Quindi l'area di C è data da

$$\text{Area}_C = \int_1^e \left(x^2 - \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}} \right) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt{4+3\log^2 x}} dx =$$

posto $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x} dx$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} (e^3 - 1) - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4+3t^2}} dt = \frac{1}{3} (e^3 - 1) - \int_0^1 t(4+3t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{3} (e^3 - 1) - \left[\frac{1}{3} \sqrt{4+3t^2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (e^3 + 1 - \sqrt{7}). \end{aligned}$$

Quindi l'area di C è $\text{Area}_C = \frac{1}{3} (e^3 + 1 - \sqrt{7})$.