Definizioni

DEF Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori nello spazio vettoriale V su un campo K.
Una **COMBINAZIONE LINEARE** dei vettori $v_1, \dots, v_k$ è un vettore

$$V \ni \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i , \qquad \lambda_i \in K \quad \forall i = 1, \dots, k$$

↑ COEFFICIENTI

DEF $\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in K \;\forall i = 1, \dots, k \right\}$

si legge **SPAN** e si descrive come:
IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V GENERATO da $v_1, \dots, v_k$.

OSS Come facciamo ad essere sicuri che $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ sia un sottospazio vettoriale di V? Facile! Intanto è un suo sottoinsieme perché V è spazio vettoriale e in quanto tale chiuso per somme di vettori e moltiplicazione per scalari, quindi $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in K \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k$. E poi basta controllare che
$\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ SIA CHIUSO PER SOMMA E MOLTIPL. PER SCALARI:

1) $\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) v_i$ ✓ $\quad (\forall \lambda_i, \mu_i \in K)$

2) $\alpha \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha \cdot \lambda_i) v_i$ ✓ $\quad (\forall \lambda_i, \alpha \in K)$

e inoltre Span non è vuoto! Ad esempio contiene ZERO e ogni v_i:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_k$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ij} \cdot v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_j + \ldots + 0 \cdot v_k$$

DEF I vettori $v_1, \ldots, v_k$ **GENERANO** $V \overset{\text{DEF}}{\iff} \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) = V$

DEF V è **FINITAMENTE GENERATO** $\overset{\text{DEF}}{\iff} \exists\, v_1, \ldots, v_k$ che generano V

DEF I vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono **LINEARMENTE DIPENDENTI** se $\exists$ una combinazione lineare con coefficienti non banali (cioè non tutti zero) che sia uguale a zero. Cioè se:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

ED ALMENO UNO TRA I λ_i NON È ZERO.

OSS Se ad essere non zero è il coefficiente λ_j, allora possiamo scrivere che:

$$v_j = \left(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + 0 + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_k v_k\right)\left(-\frac{1}{\lambda_j}\right)$$

ed ecco che abbiamo espresso il vettore v_j in termini dei rimanenti (proprio come **3 VETTORI NEL PIANO**). Cioè v_j è "DI TROPPO", o "RIDONDANTE", nel senso che tutti quei vettori che possiamo **GENERARE CON** $v_1, \dots, v_k$ tramite **COMBINAZIONI LINEARI** (cioè prendendo lo Span), li possiamo **GENERARE ANCHE SENZA** v_j. In altre parole:

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k)$$

In Matematica spesso il cappuccio ^ significa che quel vettore è stato rimosso.

$\boxed{\text{DEF}}$ I vettori $v_1, \dots, v_k$ che non sono linearmente dipendenti si dicono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** (intuitivamente: questi sono tutti **NECESSARI** o **ESSENZIALI**, appena ne togliamo uno lo spazio che generano diventa più piccolo, per esempio passa da un piano ad una retta). In altre parole: $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente INDIPENDENTI $\overset{DEF}{\iff}$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

[TRA LE 5 DEF PIÙ IMPORTANTI DEL CORSO!!]

Come si legge? Così: L'UNICA COMBINAZIONE LINEARE TRA VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI È QUELLA BANALE, IN CUI TUTTI I COEFFICIENTI SONO NULLI.

In altre parole:

"VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI SONO DEFINITI DAL FATTO DI NON AVERE ALCUNA COMBINAZIONE LINEARE NON BANALE CHE SIA UGUALE A ZERO"

Se la avessero, infatti, abbiamo visto che si potrebbe subito esprimere un vettore in termini dei rimanenti, e quel vettore sarebbe SUPERFLUO nel generare uno spazio, e quindi potremmo rimuoverlo dai generatori senza perdite di spazio generato.

$\boxed{\text{DEF}}$ $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_k\}$ è una **BASE** per V $\overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow}$

i) $v_1, \dots, v_k$ generano V (i.e. $\text{Span}(v_1 \dots v_k) = V$) ["SONO ABBASTANZA"]

ii) $v_1, \dots, v_k$ sono linearm. INDIPENDENTI ["NON SONO TROPPI"]

$\boxed{\text{DEF}}$ Si prenda $V = K^n$. La **BASE CANONICA** di K^n è

$$\mathcal{B} := \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \qquad e_j := (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{POSTO } j\text{-ESIMO}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

(proprio come nell'esempio di $\mathbb{R}^2$).

Esempi

$\boxed{k=1}$ Partiamo da un solo vettore v_1. Allora v_1 è **LINEARM. INDIP.**, a meno che non sia il vettore nullo $\mathbf{v_1=0}$. Il vettore $v_1 \neq 0$ **GENERA Span(v_1), che è una retta** ($K=\mathbb{R}$).

$\boxed{k=2}$ Consideriamo due vettori v_1 e v_2, supponiamoli entrambi non nulli. Allora v_1, v_2 sono **LIN. INDIP.** $\Longleftrightarrow$ **NON** sono **PROPORZIONALI**. Se sono LIN. INDIP. lo spazio che generano, cioè Span(v_1, v_2) è **UN PIANO** ($K=\mathbb{R}$).

$\boxed{k=3}$ $v_1, v_2, v_3 \in V$ e assumiamo che nessun vettore sia nullo. Allora sono **LIN. IND.** $\Longleftrightarrow$ nessuno dei tre si può scrivere come combinazione lineare degli altri due, e generano insieme uno spazio tridimensionale ($K=\mathbb{R}$).

Esempio: siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V := \mathbb{R}^2$. Allora $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = V$ cioè generano il piano, ed esplicitamente si può vedere così. Ogni punto (a,b) si può scrivere come combinaz. lineare di v_1 e di v_2 con i coefficienti:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1 = \frac{b+a}{3}, \ \lambda_2 = \frac{b-2a}{3}$$

Verifichiamolo: $\frac{b+a}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{b-2a}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b+a}{3} - \frac{b-2a}{3} \\ \frac{2}{3}(b+a) + \frac{1}{3}(b-2a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a}{3} \\ \frac{3b}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ✓

E come si calcolano λ_1 e λ_2? Questo è proprio l'obiettivo dei sistemi lineari:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

È IL NOSTRO SOLITO SISTEMA LINEARE 2×2 IN FORMA MATRICIALE!

LO POSSIAMO ANCHE SCRIVERE COME

IMPONIAMO IL RISULTATO CHE VOGLIAMO

$a - \frac{2(a+b)}{3}$

$a - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{3}$

Considero la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 0 & 3 & b-2a \end{array}\right) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{b-2a}{3} \Rightarrow \lambda_1 = a + \lambda_2 = \frac{a+b}{3}$$ ✓

PORTO IN FORMA SCALA

Risolvo la seconda

Sostituzione all'indietro

Più in generale:

Se vogliamo sapere se i vettori $v_1, \dots, v_m \in K^n$ sono o meno **LIN. DIP.** chiamando le coordinate dei vettori $v_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ $j = 1, \dots, m$

scriviamo una combinazione lineare come

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}}_{=:\lambda}$$

La definizione di **DIPENDENZA LINEARE** richiede che esiste un vettore non nullo λ tale che $A \cdot \lambda = 0$.

Abbiamo quindi fatto vedere che:

i vettori $v_1, \dots, v_m$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE E SOLTANTO SE il sistema lineare OMOGENEO $A \cdot \lambda = 0$ AMMETTE SOLUZIONI NON BANALI, dove la matrice A è ottenuta dai vettori $v_i =: A^{(i)}$ scegliendo i vettori come **COLONNE** di A.

Esempio: Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano dati i vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ci chiediamo se questi vettori siano **LIN. DIP.**
Allora v_1, v_2, v_3 sono LINEARMENTE DIPENDENTI se e soltanto se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ammette una soluzione $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che non sia il vettore nullo (sappiamo già che il vettore nullo è sempre soluzione di un sistema omogeneo).
Questo si risolve nel solito modo riducendo la matrice a scala prima, e poi attuando il metodo della sostituzione all'indietro.