



Diagonalizzazione

Problema agli autovalori:

$$\underbrace{A}_{\in M_n(K)} \cdot \underbrace{v}_{\in K^n} = \underbrace{\lambda}_{\in K} \underbrace{v}_{\in K^n}$$

SE ESISTE λ CHIAMA **AUTOVALORE** di A RELATIVO ALL' **AUTOVETTORE** v

SE ESISTE v CHIAMA **AUTOVETTORE** di A RELATIVO ALL' **AUTOVALORE** λ

Parafraasi: data una matrice **QUADRATA**, che quindi corrisponde ad un **ENDOMORFISMO**, **ESISTONO** delle **DIREZIONI** lungo le quali l'endomorfismo f_A agisce come uno **SCALARE**?! (ovvero lungo quelle direzioni **RISCALE** semplicemente i vettori anziché cambiarne sia lunghezza sia direzione?)-

In altre parole, **ESISTONO DIREZIONI** che vengono **PRESERVATE** dall'endomorfismo f ?

Se sì, **QUANTE SONO?** **QUALI SONO?**

Se sì, ad ogni direzione corrisponde uno scalare λ , questo si vede subito perché se $A \cdot v = \lambda v$ allora $\forall \alpha \in K$ abbiamo che $A \cdot (\alpha v) = \alpha (A \cdot v) = \alpha (\lambda v) = \lambda (\alpha v)$ quindi se vale per v allora vale per tutto lo $\text{Span}(v) := \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$.

Pero se trovo una direzione preservata **DIVERSA**, allora ci potrebbe essere un **DIVERSO SCALARE** associato ad esso.

Ora tutte le matrici quadrate, ne esistono alcune di una forma particolare, con le quali rispondere a tutte queste domande è facilissimo?

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

MATRICE
DIAGONALE

Allora è chiarissimo che:

$$A \cdot e_i = \lambda_i e_i$$

Quindi IL VETTORE DELLA BASE CANONICA e_i È UN AUTOVETTORE di $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ RELATIVO ALL' AUTOVALORE λ_i , per ogni $i = 1, \dots, n$.

Ma allora se il mondo fosse fatto di sole matrici diagonali, RISOLVERE PROBLEMI AGLI AUTOVALORI sarebbe una passeggiata!

Pero così non è.

Ci sono tante matrici quadrate (di gran lunga la maggior parte) che non sono diagonali.

Ma allora tutto è perduto?

In realtà no! Perché può darsi che un **ENDOMORFISMO** $f: V \rightarrow V$ (che almeno visto corrispondere alle matrici quadrate una volta che una base di V viene fissata) corrisponde ad una matrice quadrata **NON DIAGONALE** **IN UNA CERTA BASE**, MA **DIAGONALE IN UNA BASE DIFFERENTE!**

Se B, C sono due basi di V vettoriale su K , sappiamo che l'endomorfismo f si può rappresentare in entrambe le basi con due matrici differenti (ovviamente entrambe quadrate e di ordine uguale alla dimensione di V). Queste matrici le abbiamo chiamate:

$$M_C^C(f) \quad \text{e} \quad M_B^B(f)$$

Inoltre abbiamo visto esattamente come passare da una base all'altra tramite le matrici $M_B^B(f)$ e $M_C^C(f)$ e abbiamo visto che c'è un'equivalenza tra tutte queste matrici:

MATRICE del CAMBIO di BASE da C a B

MATRICE del CAMBIO di BASE da B a C

$$M_C^C(f) = (M_B^B(\text{id}))^{-1} \cdot M_B^B(f) \cdot M_C^C(\text{id})$$

!!
A

!!
C⁻¹

!!
B

!!
C

Possiamo re-interpretare questo fatto come segue:

Se A e B rappresentano un endomorfismo f in due basi diverse, allora $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$

Questa relazione tra A e B è una relazione di equivalenza!

Def: Siano $A, B \in M_n(K)$. Allora

$$A \sim B \iff A = C^{-1} \cdot B \cdot C \quad \exists C \in GL_n(K)$$

Si dice che A e B sono SIMILI oppure sono CONIUGATI. Invece

$$A \sim_t B \iff A = {}^t C \cdot B \cdot C \quad \exists C \in GL_n(K)$$

Si dice che A e B sono CONGRUENTI.

Lemma: $\sim, \sim_t$ sono RELAZ. D'EQUIVALENZA

Se $C \in M_n(K)$ e non in $GL_n(K)$, NON FUNZIONEREBBE!

Dim.: RIFLESSIVITA': $A = (Id)^{-1} \cdot A \cdot Id$ ✓ $A = (Id)^t \cdot A \cdot Id$ ✓

SIMMETRIA: $A = C^{-1} B C \Rightarrow C(A)C^{-1} = C(C^{-1} B C)C^{-1} = (C^{-1})^{-1} \cdot A \cdot C^{-1} = B$ ✓ (e simile per $\sim_t$)

TRANSITIVITA': $A = C^{-1} B C, B = D^{-1} E D \Rightarrow A = C^{-1} D^{-1} E D C = (DC)^{-1} E (DC)$ ✓

è simile per $\sim_t$ (RICORDA CHE: ${}^t(AB) = {}^t B \cdot {}^t A$)

Lemma: Sia $f \in \text{End}(V)$, $B''^{\{v_1, \dots, v_n\}}$ base di V e $A := M_B^B(f)$. Allora
 $B \sim A \iff B$ rappresenta $f \in \text{End}(V)$.

Dim.: $\Leftarrow$ Facile: B rappresenta $f \in \text{End}(V)$ significa che
 $B = M_B^B(f)$ per una qualche base B di V , allora $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$
 come abbiamo visto dove C è la matrice del cambio di
 base tra B e B , quindi B è simile ad A (i.e. $B \sim A$).
 $\Rightarrow$ Supponiamo che $B = C^{-1} \cdot A \cdot C \quad \exists C = (c_{ij})_{i,j} \in GL_n(K)$
 allora definiamo $w_j := \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i$ e osserviamo $C = M_B^B(\text{Id}_V)$.

Oss: Se invece abbiamo un insieme con una relazione di equivalenza,
 cioè $(M_n(K), \sim)$, allora possiamo prenderne il **QUOTIENTE**,
 che considerare $M_n(K) / \sim := \{ [A]_{\sim} \text{ classi di equivalenza} \}$
 modulo **similitudine** o **congiugato**.

e similmente $M_n(K) / \sim_t := \{ [A]_{\sim_t} \text{ classi di equivalenza} \}$
 modulo **congruenza**.