Lezione 21 novembre 2024

giovedì 21 novembre 2024 09:11

Visto: F ridotto $\Rightarrow \mathrm{Sing}\, Z_{\mathbb{P}}(F)$ è finito

e si ha: $P_1, \dots, P_s$ sono sing. con molt. $m_1, \dots, m_s$

$$2 \cdot s \le \sum_{i=1}^{s} \underbrace{m_i(m_i-1)}_{\ge 2} \le d \cdot (d-1)$$

$m_i \ge 2$

$\Rightarrow s \le \frac{d(d-1)}{2}$ ed è ottimale

Teorema: Se F irriducibile ($\Rightarrow$ ridotto) e $P_1, \dots, P_s$ punti sing. con $m_1, \dots, m_s$, allora

$$\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) \le (d-1)(d-2)$$

$d=5, \ s=1, \ m_1=4$

Visto: è ottimale: $F = f_d(x_1,x_2) + x_0 \cdot f_{d-1}(x_1,x_2)$ e f_d e f_{d-1} senza fattori comuni.

Dim: Usiamo il METODO DELLE CURVE AGGIUNTE di grado $d-1$:

$$\Lambda = \{\text{curve di grado } \overset{4}{d-1} \text{ aventi } \overset{P_1}{P_i} \text{ con molt.} \overset{\ge 3}{\ge m_i - 1} \ \forall i=1,\dots,s\}$$

$$= \{[F] \in \mathbb{P}^{N(d,2)} : F(P_i) = 0 \text{ e ha molt. } \ge m_i - 1\}$$

oss.: $[\partial_{x_0}F], [\partial_{x_1}F], [\partial_{x_2}F] \in \Lambda$

Vogliamo valutare le codim di Λ, cioè le condizioni lineari imposte ai polinomi

$[G] \in \Lambda \iff$ tutte le derivate parziali (m_i-2)-esime di G si annullano in P_i, $\forall i=1,\dots,s$

es.: $m_i - 2 = 2$

$\partial_{x_0x_0} \quad \partial_{x_0x_1} \quad \partial_{x_0x_2} \quad \partial_{x_1x_1} \quad \partial_{x_1x_2} \quad \partial_{x_2x_2}$

sono $6 = \binom{2+2}{2}$, sono in biiezione con tutti i monomi monici di grado 2.

Analogamente: # derivate parziali di ord. $m_i - 2$

$= \#$ monomi di grado $m_i - 2$

$\binom{2+k}{2}$

$$= \binom{2 + (m_i-2)}{2} = \binom{m_i}{2} = \frac{m_i(m_i-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \dim \Lambda \ge \boxed{N(d-1,2) - \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2}}}$$

F irr. $\Rightarrow F$ ridotto

$\Rightarrow$ applico Teo di prima

$\le \frac{d(d-1)}{2}$

$= 14 - 6 = 8$

$$\ge \frac{(d-1)(d+2)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = \frac{(d-1)}{2}(d+2-d)$$

$$= \boxed{d-1}$$

$$N(d-1,2) = \frac{(d-1)(d+2)}{2}$$

$d=5$

$$N(k,2) = \frac{k(k+3)}{2} = \binom{k+2}{2} - 1$$

Stiamo cons. $Z_p(F)$ singolare $\Rightarrow d \geq 2$

$\Rightarrow \dim \Lambda \geq d-1 \geq 1$

Poniamo:

$$x := N(d-1,2) - \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2} \qquad = 8$$

Fisso x punti su $Z_p(F)$, $Q_1, \dots, Q_x$,

tutti diversi dai P_i.

$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\dim \Lambda \geq x}$

Alle curve di Λ posso imporre passaggio

per $Q_1, \dots, Q_x$: trovo $\Lambda' \subseteq \Lambda$

$\dim \Lambda' \geq x - x = 0$

$\Rightarrow \exists\ [G] \neq [0]\,,\quad [G] \in \Lambda'$

$$Z_p(F) \cap Z_p(G) \supseteq \{\underset{\text{con molt.} \geq m_i - 1}{P_1, \dots, P_s}, Q_1, \dots, Q_x\}$$

F irriducibile, $\deg F = d > d-1 = \deg G$

$\Rightarrow$ F e G non hanno comp. comuni

$\Longrightarrow$

Teo. di Bézout:

$$\sum_{i=1}^{s} \underbrace{I_{P_i}(F,G)}_{\geq m_i(m_i-1)} + \sum_{j=1}^{x} \underbrace{I_{Q_j}(F,G)}_{\geq 1} \leq \sum_{Q \in Z_p(F) \cap Z_p(G)} I_Q(F,G) = d \cdot (d-1)$$

$\downarrow$ martedì

$$\geq \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) + x$$

$4 \cdot 3 + 8 = 12 + 8 = 20 \qquad \leq 5 \cdot 4 = 20$

$$\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) + x \leq d(d-1)$$

$$\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) + N(d-1,2) - \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2} \leq d(d-1)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2}} \leq d(d-1) - N(d-1,2)$$

$$= d(d-1) - \frac{(d-1)(d+2)}{2}$$

$$= \frac{(d-1)}{2}(2d - d - 2)$$

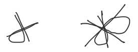
$$= \boxed{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) \leq (d-1)(d-2)$$

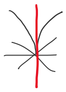
Def.: Supp. F irriducibil. Supp. $Z_p(F)$

abbia SINGOLARITÀ ORDINARIE,

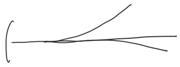
cioè ogni punto sing. P_i di molt. m_i ha il numero massimo di tg principali in P_i, cioè m_i tangenti distinte, oppure



CUSPIDI ORDINARIE, cioè 1! tangente principale L in P_i, e $I_{P_i}(F, L) = m_i + 1$



$\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$: L : $y=0$: $x^3 = 0$



allora $g := \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2} \geq 0$

si dice GENERE GEOMETRICO di $Z_p(F)$.

OSS.: Se $Z_p(F)$ è liscia $(\mathrm{Sing}\, Z_p(F) = \emptyset)$

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Def.: Se $g = 0$, la curva $Z_p(F)$ si dice RAZIONALE.

Teorema: Se $Z_p(F)$ è razionale, allora $\exists$ una parametrizzazione, cioè una mappa polinomiale:

$$f : \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma \longrightarrow Z_p(F)$$

Σ insieme finito (o vuoto)

che sia genericamente iniettiva (cioè non iniettiva per al più # finito di punti)

e data da

$$f(t_0 : t_1) = (F_0(t_0, t_1) : F_1(t_0, t_1) : F_2(t_0, t_1))$$

con F_i omogenei e tutti dello stesso grado

(f è ben definita:

$$f(\lambda t_0 : \lambda t_1) = (F_0(\lambda t_0, \lambda t_1) : F_1(\lambda t_0, \lambda t_1) : F_2(\lambda t_0, \lambda t_1))$$
$$= (\lambda^{\deg F_0} \cdot F_0(t_0, t_1) : \lambda^{\deg F_1} F_1(t_0, t_1) : \lambda^{\deg F_2} F_2(t_0, t_1))$$
$$= (F_0(t_0, t_1) : F_1(t_0, t_1) : F_2(t_0, t_1))$$

$= f(t_0, t_1)$

OSS.: Se cons.

$$\begin{tikzcd} f : \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma \arrow[r] & Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2 \\ U_0 \setminus \Sigma \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[r] & Z_p(F) \end{tikzcd}$$

$U_0 \subseteq \mathbb{P}^1 \ : \ U_0 = \{t_0 \neq 0\} \Rightarrow (t_0 : t_1) = (1 : t)$

$= \mathbb{P}^1 \setminus Z_p(t_0)$

$$f\big|_{U_0 \setminus \Sigma} = (F_0(1,t) : F_1(1,t) : F_2(1,t)) \subseteq \mathbb{P}^2$$

$\cup|$

$V_0 = \mathbb{P}^2 \setminus Z_p(x_0)$

$$f((U_0 \setminus \Sigma)) \cap V_0 = \{ \underbrace{(F_0(1,t) : F_1(1,t) : F_2(1,t))} \mid F_0(1,t) \neq 0 \}$$

$$\subseteq \underbrace{Z_p(F) \cap V_0}$$

$\updownarrow$

$Z(aF)$

$V_0 \cong \mathbb{A}^2$

$V_0 \xrightarrow{j_0^{-1}} \boxed{\mathbb{A}^2}$

$\downarrow$

$$\left(\frac{F_1(1,t)}{F_0(1,t)} , \frac{F_2(1,t)}{F_0(1,t)} \right) \in \mathbb{A}^2$$

$$\begin{tikzcd} f : \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma \arrow[r] & Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2 \\ (1:t) \in U_0 \setminus \Sigma \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[d, "t"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & Z_p(F) \cap V_0 \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ \varphi : \mathbb{A}^1 \setminus \Sigma' \arrow[r] & Z(aF) \subseteq \mathbb{A}^2 \end{tikzcd}$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{F_1(1,t)}{F_0(1,t)} , \frac{F_2(1,t)}{F_0(1,t)} \right)$$

$$= \left(\frac{aF_1}{aF_0}(t), \ \frac{aF_2}{aF_0}(t) \right)$$

$$= \left(\frac{f_1(t)}{f_0(t)} , \frac{f_2(t)}{f_0(t)} \right) \in Z(aF) \subseteq \mathbb{A}^2$$

Viceversa: se è data

$$\psi : \mathbb{A}^1 \setminus \Sigma^1 \longrightarrow Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2$$

$$\psi(t) = \left(\frac{f_1(t)}{g_1(t)} , \frac{f_2(t)}{g_2(t)} \right)$$ t.c. $\deg f_1 = \deg g_1$

$\deg f_2 = \deg g_2$

se immergo $\mathbb{A}^1 \xhookrightarrow{j_0} \mathbb{P}^1$

$\mathbb{A}^2 \xhookrightarrow{k_0} \mathbb{P}^2$

posso estendere ψ a mappa ℓ

$$\ell : \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma \longrightarrow Z_p(hf) \subseteq \mathbb{P}^2$$

$$\ell(t_0 : t_1) = (hg_1 \cdot hg_2 : hf_1 \cdot hg_2 : hf_2 \cdot hg_1)$$