Lezione 26 novembre 2024

martedì 26 novembre 2024 17:01

Ezione

Vogliamo dimostrare:

Teorema: Se $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ irriducibile e con sing. ordinarie o cuspidi ordinarie $P_1, \dots, P_s$, di molt. $m_1, \dots, m_s$; $\deg F = d \geq 2$

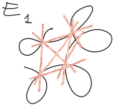
Supp. $g = \underbrace{\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \boxed{\sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2}}} = 0$

Allora $\exists$ una parametrizz. razionale di $Z_p(F)$

cioè: $f : \underset{\text{insieme finito}}{\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma} \longrightarrow Z_p(F)$

genericamente iniettiva.

Dim. A meno di proiettività, posso supp. che $Z_p(F)$ e tutti i suoi punti singolari in posiz. ammissibile sia risp. E_2 che risp. E_1



inoltre supp: $\text{Sing}\, Z_p(F) \subseteq U_0 = \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$

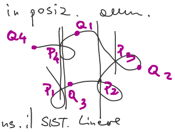
Cons. le AGGIUNTE di grado $d-1$, che hanno i punti P_i con molt. $m_i - 1$.

Impongo, inoltre, il pass. per ulteriori $2d-3$ punti non singolari di $Z_p(F) \cap U_0$

$Q_1, \dots, Q_{2d-3}$

e tali che $P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_{2d-3}$

in posiz. amm. risp. E_1 e E_2



Cons. il SIST. Lineare

$\Lambda_{d-1} := \{$ curve di grado $d-1$, con P_i di molt. $m_i - 1$ e passanti per $Q_1, \dots, Q_{2d-3}$ $\}$

$$\boxed{\dim \Lambda_{d-1}} \geq N(d-1, 2) - \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\binom{m_i - 2 + 2}{2}}_{\substack{= \#\text{ di tutte le derivate parziali} \\ \text{di ordine } m_i - 2}} - (2d-3)$$

$$= N(d-1, 2) - \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2}}_{= \frac{(d-1)(d-2)}{2} \text{ per ipotesi}} - (2d-3)$$

$$= \frac{(d-1)(d+2)}{2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} - (2d-3)$$

$$= \frac{(d-1)}{2}(d+2-d+2) - (2d-3) = \frac{(d-1)}{2} \cdot 4 - (2d-3)$$

$= 2d - 2 - 2d + 3 = \boxed{1}$

Affermo che $\dim \Lambda_{d-1} = 1$

Per assurdo: $\dim \Lambda_{d-1} \geq 2$

alle curve di Λ_{d-1} posso imporre pass. per ulteriori 2 punti: S_1 e S_2

$\exists\ [D] \in \Lambda_{d-1}$

F irriducibile $\Rightarrow$ F e D non hanno componenti comuni

$\xRightarrow{\text{Teo. Bezout}}$

$$\boxed{d(d-1)} = \sum_{Q \in Z_p(F) \cap Z_p(D)} I_Q(F,D) \geq \underbrace{\sum_{P_i \in \mathrm{Sing}\, Z_p(F)} I_{P_i}(F,D)} + \sum_{j=1}^{2d-3} I_{Q_j}(F,D) + I_{S_1}(F,D) + I_{S_2}(F,D)$$

$$\geq \underbrace{\sum_{i=1}^{s} m_i \cdot (m_i - 1)}_{= (d-1)(d-2) \text{ per ipotesi}} + (2d-3) + 1 + 1$$

$$= (d-1)(d-2) + (2d-3) + 2$$

$$= d^2 - 3d + 2 + 2d - 1 = d^2 - d + 1 = \boxed{d(d-1) + 1}$$

ASSURDO.

$\Rightarrow \dim \Lambda_{d-1} = 1$, è un fascio

$$\Lambda_{d-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(G_1, G_2))$$

$$\Downarrow$$

$$[G] = [t_0 \cdot G_1 + t_1 \cdot G_2]$$

OSS.: Per costruzione, $\forall\ [G] \in \Lambda_{d-1}$,

$$Z_p(G) \cap Z_p(F) \supseteq \{P_i\} \cup \{Q_j\}$$

Se cons. $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} I_{P_i}(F,G) + \sum_{j=1}^{2d-3} I_{Q_j}(F,G) \geq \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) + (2d-3)$

Idea: al variare della coppia $(t_0 : t_1)$, le $= d(d-1) - 1$

curve del fascio $Z_p(t_0\, G_1 + t_1 \cdot G_2)$ intersecano

la $Z_p(F)$ in $(d-1)\cdot d - 1$ punti fissi, e

un punto mobile che dipende da $(t_0 : t_1)$

Siccome cerchiamo una parametrizz. definita fuori da un insieme finito, possiamo restringerci a:

$$\left(Z_p(F) \cap Z_p(t_0 G_1 + t_1 G_2) \right) \cap U_0$$

e anche cons. solo curve $t_0 G_1 + t_1 G_2$ con

$t_0 \neq 0$ (perdo solo il punto $Z_p(F) \cap Z_p(G_2)$)

$\Rightarrow$ voglio studiare $Z(aF) \cap Z(aG_1 + t \cdot aG_2)$

$t_0 = 1, \quad t_1 = t$

Cons. 2 risultanti

$$R_y(aF, aG_1 + \boxed{t}\, aG_2) =: R_1(x,t)$$: i suoi zeri sono le prime coordinate dei punti di int.

$$R_x(aF, aG_1 + \boxed{t}\, aG_2) = R_2(y,t)$$

i suoi zeri sono le seconde coordinate dei punti di int.

$R_1(x,t)$ ha grado $d\cdot(d-1) = M$ nella x

$$R_1(x,t) = b_M(t)\cdot x^M + b_{M-1}(t)\cdot x^{M-1} + \dots + b_1(t)\cdot x + b_0(t)$$

$b_M(t) \neq 0$

Se $P_i = (1 : e_i : b_i) \in U_0$

$Q_j = (1 : c_j : d_j)$

$R_1(x,t)$ è annullato da e_i con molt. $\geq m_i(m_i-1)$

annullato da c_j con molt. ≥ 1

★

$$\Rightarrow R_1(x,t) = b_M(t)\cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{s} (x-e_i)^{m_i(m_i-1)} \cdot \prod_{j=1}^{2d-3} (x-c_j)}_{\text{sono } d\cdot(d-1)-1 \text{ fattori lineari}} \cdot (x - \Phi(t))$$

Affermo che $\Phi(t)$ è un quoziente di polinomi

Infatti: dalla ★

$$b_{M-1}(t) = -b_M(t)\cdot\left(\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1)\cdot e_i + \sum_{j=1}^{2d-3} c_j + \Phi(t)\right)$$

$$-\frac{b_{M-1}(t)}{b_M(t)} = \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1)\cdot e_i + \sum_{j=1}^{2d-3} c_j + \Phi(t)$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = -\frac{b_{M-1}(t)}{b_M(t)} - \sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1)\cdot e_i - \sum_{j=1}^{2d-3} c_j$$

Analog. $R_2(y,t)$ ha come $d(d-1)$-esima radice una opp. funzione $\psi(t)$ che è quoziente di polinomi

In questo modo:

$$f : \mathbb{A}^1 \setminus \Sigma \longrightarrow Z(eF) \subseteq \mathbb{A}^2$$
$$t \longrightarrow (\Phi(t), \psi(t))$$

per costruz. è genericamente iniettiva

Esempi : $d=2$ $\quad \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 0$

F irriducibile $\Rightarrow$ F non singolare

$d=3$: $\quad s \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1$ singolar, ed è doppio (se $m=3=d$, $Z_p(F)$ = tre rette per un punto)

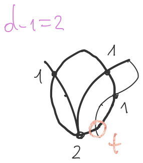
$m_1 = 2$

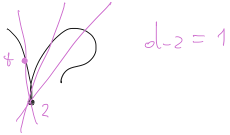
$$\Rightarrow g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{2\cdot 1}{2} = 1-1 = 0$$

⇒ Ogni cubica irriducibile singolare è parametrizzabile

Esercizio: Se $d \geq 3$, e $g = 0$, una parametrizz. si può trovare anche con SL delle aggiunte di grado $d-2$ (con P_i di molt. $m_i - 1$ e passanti per un # opportuno di ulteriori punti)

es. $d = 3$: coniche per il punto singolare e passanti per ulteriori $2d-3 = 3$ punti



oppure