Def: $Q \in \mathbb{Z}_p(F)$ è flesso $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Q è singolare di $\text{Im}(\sigma_Q \circ \widetilde{F}) \geq 3$

$F(x_0,x_1,x_2) \in K[x_0,x_1,x_2]$ $\deg 3$; introduciamo H_F il suo hessiano, e

ricordiamo $H_F(x_0,x_1,x_2) = \det M_F$ è curva di grado $3(d-2)$, eguale

all'intersezione totale.

$\mathbb{Z}_p(H_F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$ si chiama CURVA HESSIANA

Teorema: $\mathbb{Z}_p(H_F) \cap \mathbb{Z}_p(F) = \{\text{flessi}\}$

oss: Se $\mathbb{Z}_p(F)$ è liscia, e $K = \overline{K}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_p(F)$ ha almeno 1 flesso e # flessi $\leq 3d(d-2)$

Lemma:

$\mathbb{Z}_p(F) \cap \mathbb{Z}_p(H_F) \neq \emptyset$; se $\text{Sing } \mathbb{Z}_p(F) = \emptyset$,

vale in cui almeno 1 punto di flesso.

oss: Se $\mathbb{Z}_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ è unione di d

rette passanti per un punto $Q \in \mathbb{P}^2$

$\Rightarrow H_F \equiv 0$

Idea: costruiamo da $\forall\, T : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$

proiettività

$H_F \equiv 0 \iff H_{\widetilde{F}} \equiv 0$

$T(\mathbb{Z}_p(F)) = \mathbb{Z}_p\Big(F\big(T^{-1}\big(\tfrac{x_1}{x_0}\big)\big)\Big)$

$= \widetilde{F}$

Se $\mathbb{Z}_p(F) =$

con proiettività

$T : Q \to (1:0:0)$

$\widetilde{F} = \sum_{i=0}^{d} \widetilde{a}_i x_1^i x_2^{d-i}$, con $\mathbb{Z}_p(\widetilde{F})$ è nella

posizione per $(1:0:0)$

Forma della pr $(1:0:0)$

la generica equazione $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$

$\widetilde{F} = \widetilde{a}_0(\lambda x_1 + \mu x_2)^d + \widetilde{a}_1(\lambda x_1 + \mu x_2)^{d-1} x_0 + \dots + \widetilde{a}_d x_0^d$

$= \widetilde{F}(x_0, x_1)$

$M_{\widetilde{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{x_1}\widetilde{F} & \partial_{x_0}\widetilde{F} \\ 0 & \partial_{x_0}\widetilde{F} & \partial_{x_0}\partial_{x_0}\widetilde{F} \end{pmatrix}$

$H_{\widetilde{F}} \equiv 0$

TEOREMA GORDON - NOETHER:

$\mathbb{Z}_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ la $H_F \equiv 0 \iff$

$\mathbb{Z}_p(F) =$

Dim: omesso.

oss: $F = F(x_0, x_1, \dots, x_n) \in K[x_0, x_1, \dots, x_n]_d$

$\Rightarrow H_F \equiv 0$

$\mathbb{Z}_p(F) \subseteq \mathbb{P}^n$

(ricordi in $\mathbb{R}^3$: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$)

è un cono proiettivo: ha vertice $(0:0:0:1)$

Gordan - Noether: tutti i coni proiettivi (ipersuperfici che sono unioni di rette passanti per un punto VERTICE V) hanno $H_F \equiv 0$

LUDWIG OTTO HESSE: Congetture: $H_F \equiv 0 \iff \mathbb{Z}_p(F)$ è cono proiettivo in $\mathbb{P}^n$

(1811 - 1882) FALSA in $K[x_1, x_2]$

oss: in $\mathbb{P}^2$:

GORDAN - NOETHER: Congetture vera in $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^3$

FALSA in $\mathbb{P}^4$:

PRESUNTO DI PERA220

Controesempio: $x_0x_2^3 + x_1x_3^3 + x_2x_4^3 = 0$ es.

Esercizio: calcolare H_F

La caratterizzazione delle proiettività a Hessiano nullo in $\mathbb{P}^2$, in $\mathbb{P}^n$ vale: PROBLEMA APERTO

Teorema: geometria dei flessi di cubiche irriducibili in $\mathbb{P}^2$

oss: Se $\mathbb{Z}_p(F)$ è una cubica priva RIDUCIBILE

abbiamo 2 casi:

① flessi: 3 — $\mathbb{Z}_p(H_F) \supseteq L$ — flessi: 3

② flesso particolare — $H_F \neq 0$ — $H_F \equiv 0$

es. $x_0x_1x_2 = 0$

$H_F = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & x_0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta H = -x_1(-x_0x_1) + x_2 x_1 x_0$

$= 2\, x_0x_1x_2$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_p(H_F) = \mathbb{Z}_p(F)$

CUBICHE RIDUCIBILI NON RIDOTTE:

SONO CASI PARTICOLARI

DI 3 rette per un punto

$H_F \equiv 0$

$H_F \equiv 0$

Teorema: $\mathbb{Z}_p(F)$ cubica liscia $\Rightarrow$ 9 flessi