Lezione 19 novembre 2024

martedì 19 novembre 2024 16:51

Scambio tra Analisi Reale e IAG

9 dic ⟷ 12 dic

~. ~.

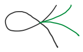
Visto: F pol. ridotto $\Rightarrow \# \operatorname{Sing} Z_p(F) < +\infty$

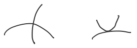
Oggi: stima ottimale su #.

Useremo i sistemi lineari.

Prima vediamo un'analisi di $I_Q(F, G)$

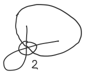
in punti singolari





Teorema: $Z_p(F), Z_p(G) \subseteq \mathbb{P}^2$ senza componenti comuni. Sia $Q \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$ e supp. $m_Q(F) = p \geq 1$, $m_Q(G) = q \geq 1$.

Allora $I_Q(F, G) \geq p \cdot q$.



Dim.: Ricordo che $I_Q(F, G)$ è stato def così:

supp. F & G in posiz. ammiss. risp.

$E_2 = (0:0:1)$; $I_Q(F, G) :=$ molt. alg. del fattore $(q_1 x_0 - q_0 x_1)$, corrispondente a $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$ nel risultante $R_{x_2}(F, G) = R(x_0, x_1)$

A meno di proiettività posso supp. F e G in posiz. amm. risp. a E_2, cioè:

$\deg F = r$

$$F = F_r \cdot x_2^r + F_{r-1} \cdot x_2^{r-1} + \dots + F_1 \cdot x_2 + F_0$$

$F_i = F_i(x_0, x_1)$, $F_r \neq 0$

$\deg G = s$

$$G = G_s \cdot x_2^s + G_{s-1} \cdot x_2^{s-1} + \dots + G_1 \cdot x_2 + G_0$$

$$G_j = G_j(x_0, x_1)$$

A meno di proiettività posso supp. anche che $Q = (1:0:0) \in U_0 = \mathbb{P}^2 \setminus Z_p(x_0)$

Infine: osservo che i punti singolari e le loro molteplicità sono mantenuti sotto proiettività, e così anche per le molt. di intersezione tra curve.

Posso lavorare in $U_0 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$; $Z_p(F) \cap U_0$ e $Z_p(G) \cap U_0$ corrispondono ai luoghi di zeri dei deomogeneizzati

a $F = f(x, y) = f_r(x) \cdot y^r + f_{r-1}(x) \cdot y^{r-1} + \dots + f_1(x) \cdot y + f_0(x)$ $\Longrightarrow$

$x^p \mid f_0(x) \Rightarrow f_0(x) = x^p \cdot a_0(x)$

$x^{p-1} \mid f_1(x) \Rightarrow f_1(x) = x^{p-1} \cdot a_1(x)$

e $G = g(x,y) = g_s(x)\cdot y^s + g_{s-1}(x)\cdot y^{s-1} + \dots + g_1(x)\cdot y + g_0(x)$

$$\underset{(1:0:0)}{Q} \overset{f_0 = g_0^{-1}}{\rightsquigarrow} (0,0) \in \mathbb{A}^2$$ è di molt. $p \geq 1$ per $Z(f) \iff$ in $f(x,y)$ MANCANO i TERMINI di GRADO $\leq p-1$

—‖— $\varrho \geq 1$ per $Z(g) \iff$ in $g(x,y)$ MANCANO i TERMINI di grado $\leq \varrho - 1$

$(p \leq r, \quad \varrho \leq s)$

$\vdots$

$x \mid f_{p-1}(x) \Rightarrow f_{p-1}(x) = x \cdot Q_{p-1}(x)$

Analog: $x^\varrho \mid g_0(x) \Rightarrow g_0(x) = x^\varrho \cdot b_0(x)$

$x^{\varrho-1} \mid g_1(x) \Rightarrow g_1(x) = x^{\varrho-1} \cdot b_1(x)$

$\vdots$

Cons. $R_y(f(x,y), g(x,y)) = R(x)$

$$\begin{array}{c}
s\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right.
\end{array}
\begin{pmatrix}
f_r(x) & f_{r-1}(x) & \cdots & x^{p-1}\cdot Q_1(x) & x^p\cdot Q_0(x) & 0 \cdots\cdots & & 0 \\
0 & f_r(x) & f_{r-1}(x) & \cdots & x^{p-1}\cdot Q_1(x) & x^p\cdot Q_0(x) \cdots & & \\
0 & 0 & f_r(x) & \cdots & & & & \\
g_s(x) & g_{s-1}(x) & \cdots\cdots & x^{\varrho-1}\cdot b_1(x) & x^\varrho\cdot b_0(x) & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 \\
0 & g_s(x) & g_{s-1}(x) & \cdots & x^{\varrho-1}\cdot b_1(x) & x^\varrho\cdot b_0(x) & 0 \cdots &
\end{pmatrix}$$

Ora: molt. alcune righe per opportune potenze di x

vediamo nel caso $\deg f = r = 3$, $p = 2$

$\deg g = s = 4$, $\varrho = 2$

$f = f_3(x)\cdot y^3 + f_2(x)\cdot y^2 + f_1(x)\cdot y + f_0(x)$

$$\begin{pmatrix}
f_3(x) & f_2(x) & x\cdot Q_1(x) & x^2\cdot Q_0(x) & 0 & 0 & 0 \\
0 & f_3(x) & f_2(x) & x\cdot Q_1(x) & x^2\cdot Q_0(x) & 0 & 0 \\
0 & 0 & x\cdot f_3(x) & x\cdot f_2(x) & x^2\cdot Q_1(x) & x^3\cdot Q_0(x) & 0 \\
0 & 0 & 0 & x^2 f_3(x) & x^2 f_2(x) & x^3\cdot Q_1(x) & x^4\cdot Q_0(x) \\
g_4(x) & g_3(x) & g_2(x) & x\cdot b_1(x) & x^2\cdot b_0(x) & 0 & 0 \\
0 & x\cdot g_4(x) & x g_3(x) & x\cdot g_2(x) & x^2\cdot b_1(x) & x^3 b_0(x) & 0 \\
0 & 0 & x^2 g_4(x) & x^2 g_3(x) & x^2 g_2(x) & x^3\cdot b_1(x) & x^4\cdot b_0(x)
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \cdot\, x \\ \cdot\, x^2 \\ \\ \cdot\, x \\ \cdot\, x^2 \end{array}$$

$g(x,y) = g_4(x)\cdot y^4 + g_3(x)\cdot y^3 + g_2(x)\cdot y^2 + g_1(x)\cdot y + g_0(x)$

Per le molt. del determinante sulle righe della matrice e sulle colonne

$$\left.\begin{array}{l}
\det(\text{nuova matrice}) = x \cdot x^2 \cdot x \cdot x^2 \cdot R_y(f,g) = x^6 \cdot R(x) \\
\qquad\qquad\qquad\quad = x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot h(x) = x^{10}\cdot h(x)
\end{array}\right\} \Rightarrow R(x) = x^4 \cdot h(x)$$

con $h(x)$ opportuno polinomi

Conseguenze:

Teorema: **Sia** F ridotto (non nec. irriduc.)
Siano $P_1, \dots, P_s$ i punti singolari di $Z_p(F)$
di molteplicità $m_1, \dots, m_s \geq 2$. Allora:

$$\sum_{i=1}^{s} m_i (m_i - 1) \leq d(d-1)$$

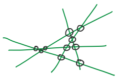
dove $d = \deg F$.

In particolare, se $m_i = 2$ $\forall i = 1, \dots, s$
si ha $m_i(m_i-1) = 2$, e

$$\boxed{s = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i(m_i-1)}{2} \leq \frac{d(d-1)}{2}}$$

OSS. Questa stima è migliore di quella vista $s \leq \deg(\partial_{x_1} F) \cdot \deg(\partial_{x_2} F)$
$= (d-1)^2$

OSS.: La stima è ottimale; ad esempio è raggiunta da un'unione di d rette "generali", cioè t.c. in ogni punto di int. passano esattamente 2 rette:

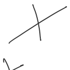


i punti singolari sono tutti doppi : $m_i = 2$ $\forall i$
e corrispondono ai punti di intersezione;

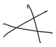
il loro numero è: ogni retta interseca ognuna delle altre $d-1$ rette in 1 punto

trovo $\frac{d \cdot (d-1)}{2}$ punti di int.

$d = 2$: 1 punto sing.



$d = 3$: 3 punti sing



$d = 4$: 6 punti sing.

Dim. Uso Bezóut.

Enunciato è vero a meno proiettività.
Posso supp. $Z_p(F)$ in posiz. qeun. risp. E_2

$$F = \underbrace{a_d}_{\neq 0} \cdot x_2^d + a_{d-1} \cdot x_2^{d-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 \quad ✪$$

$$a_i = a_i(x_0, x_1)$$

$$\partial_{x_2} F = \underbrace{d \cdot a_d}_{\neq 0} \cdot x_2^{d-1} + (d-1) \cdot a_{d-1} \cdot x_2^{d-2} + \dots$$

Domanda: è possibile che F e $\partial_{x_2} F$ abbiano un fattore irriducibile comune?

No: infatti se $\exists\, H = H(x_0, x_1, x_2)$, in cui compare x_2

$$\left.\begin{aligned} F &= H \cdot F_1 \\ \partial_{x_2} F &= H \cdot G \end{aligned}\right) \rightarrow \underbrace{H^2 \text{ divide } F}$$

$\Downarrow$

impossibile perchè F ridotto

$F \in \mathbb{K}[x_0, x_1][x_2]$

$\partial_{x_2} F \in \mathbb{K}[x_0, x_1][x_2]$

$H \in \mathbb{K}[x_0, x_1][x_2]$

È possibile che $H = H(x_0, x_1)$?

No perchè supp. F verifica ✪.

Per Teorema di Bézout:

$$\sum_{i=1}^{s} I_{P_i}(F, \partial_{x_2}F) \leq \sum_{Q \in Z_p(F) \cap Z_p(\partial_{x_2}F)} I_Q(F, \partial_{x_2}F) = \boxed{d \cdot (d-1)}$$

$\rotatebox{-90}{$\geq$}$

$\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1)$

OSS.: Se P_i è sing. di molt. $m_i \geq 2$ per $Z_p(F) \Rightarrow P_i$ annulla tutte le derivate parziali di ordine $\leq m_i - 1$ di F

$\Rightarrow P_i$ annulla tutte le derivate parziali di ordine $\leq m_i - 2$ di $\partial_{x_2}F$ (perché sono delle particolari der. parz. di ordine $m_i - 1$ di F)

$\Rightarrow P_i$ ha molteplicità $m_i - 1$ per $Z_p(\partial_{x_2}F)$

$$\Rightarrow I_{P_i}(F, \partial_{x_2}F) \boxed{\geq} m_i \cdot (m_i - 1)$$

* * *

Se F, oltre che ridotto, è anche IRRIDUCIBILE, possiamo migliorare ancora:

Teorema: Se F è irriducibile, $P_1, .., P_s$ punti singolari di molteplicità $m_1, .., m_s$, allora:

$$\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) \leq (d-1)(d-2)$$

OSS.: la stima è ottima:

ad esempio: $f(x,y) = f_d(x,y) + f_{d-1}(x,y)$

ovvero $F(x_0, x_1, x_2) = f_d(x_1, x_2) + x_0 \cdot f_{d-1}(x_1, x_2)$

con f_d omogenea di grado d

f_{d-1} —"— —"— $d-1$

senza fattori comuni

Abbiamo visto che f, e quindi F, è irriducibile

e $Z_p(F)$ ha 1 unico punto singolare

$(1:0:0)$, di molt. $m = d-1$.

In questo caso: $s = 1$

$m_1 = d-1$

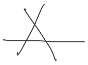
$$\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i-1) = (d-1)(d-2) \underset{=}{\leq} (d-1)(d-2)$$

CONSEGUENZE: Criteri di riducibilità

Se $Z_p(F)$ ridotta ha più di $(d-1)(d-2)$ punti singolari $\Rightarrow F$ è riducibile.

Es: $d = 2$: se una conica ha 1 punto sing $\Rightarrow$ è riducibile

$s \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 0$

$d = 3$: $s \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1$: se cubica ha 2 o più punti singolari, è riducibile