Lezione 28 novembre 2024

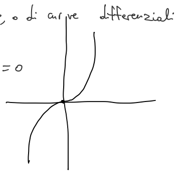
martedì 28 novembre 2023 09:18

FLESSI DI CURVE PIANE ALG

(Sernesi, Geo 1)
Bollati Boringhieri

Vorremmo generalizzare la nozione di FLESSO (di curve che sono grafici di una funzione, o di curve differenziali parametrizzate)

Es.: $y = x^3$, $y - x^3 = 0$



(0,0) è flesso del grafico

Da un punto di vista alg:

$x^3 - y = 0$ è curva affine passa per (0,0) è un punto semplice, con tg $y = 0$

eq. della tg in (0,0) = parte lineare dell'eq.

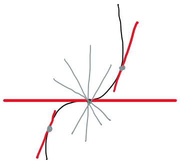
$t_{(0,0)} Z(f) : y = 0$

$$\begin{cases} f = x^3 - y \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Inoltre $I_{(0,0)}(f, t_{00} Z(f)) = 3$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} : \quad x^3 = 0$$



Def.: Un punto $Q \in Z_p(F)$ (oppure $Z(f)$) si dice **PUNTO DI FLESSO** per $Z_p(F)$ se:
- è un punto semplice (non singolare)
- $I_Q(F, \mathcal{T}_Q(Z_p F)) \geq 3$.

retta tg proiettiva in Q

Es: $d = 1$, $Z_p(F) = L$ è una retta; $\forall Q \in L$ è semplice

$\mathcal{T}_Q L = L \quad \forall Q \in L$

per convenzione $\quad I_Q(L, \mathcal{T}_Q L) = +\infty \geq 3$

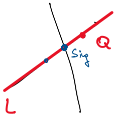
$\Rightarrow \forall Q \in L$, Q è un flesso

OSS.: Per il Teo di Bézout, una conica irriducibile NON HA PUNTI DI FLESSO.

Infatti: se L è una retta,

$$\sum_{Q \in L \cap Z_p(F)} I_Q(L, Z_p(F)) = 1 \cdot 2 = 2$$

Se invece la conica è riducibile, C = unione di due rette (distinte o coincidenti), allora



$\tau_Q = L$

$I_Q(C, \tau_Q) = +\infty \geq 3$

vale $\forall Q$ semplice di C

$\Rightarrow$ C ha infiniti flessi.

Def.: Cons. $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$;

$F = F(x_0, x_1, x_2)$ omog. di grado $d \geq 2$

la MATRICE HESSIANA DI F in $Q \in \mathbb{P}^2$

$$M_F(Q) = \begin{pmatrix} \partial_{x_0x_0}F(Q) & \partial_{x_0x_1}F(Q) & \partial_{x_0x_2}F(Q) \\ \partial_{x_0x_1}F(Q) & \partial_{x_1x_1}F(Q) & \partial_{x_1x_2}F(Q) \\ \partial_{x_2x_0}F(Q) & \partial_{x_2x_1}F(Q) & \partial_{x_2x_2}F(Q) \end{pmatrix}$$

$$M_F = \left(\partial_{x_ix_j}F\right) \quad 3\times 3$$

le sue entrate sono polinomi omogenei

di grado $d-2$

L' **HESSIANO** o **DETERMINANTE HESSIANO**

$H_F(Q) = \det M_F(Q) \in K$

$H_F = \det M_F \in K[x_0, x_1, x_2]_{3(d-2)}$

H_F o è il polinomio nullo, opp. è un

polinomio omogeneo di grado $3(d-2)$.

Def.: Se $d \geq 3$ La curva $Z_p(H_F)$ si chiama

CURVA HESSIANA di $Z_p(F)$.

Supp. $d \geq 3$. Sia F pol. omog. di grado d, non nec. irr. nè ridotto

TEOREMA: $Z_p(F) \cap Z_p(H_F) = \{\text{flessi di } Z_p(F)\} \cup \text{Sing } Z_p(F)$

Dim.: $\supseteq$:

Sia $Q \in Z_p(F)$, $Q \in \text{Sing } Z_p(F)$

$\Rightarrow \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$0 = (d-1)\,\partial_{x_0}F(Q) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Eulero}}}{=} q_0\,\partial_{x_0x_0}F(Q) + q_1\,\partial_{x_0x_1}F(Q) + q_2\,\partial_{x_0x_2}F(Q)$$

$Q=(\varrho_0:\varrho_1:\varrho_2)$

$$0=(d-1)\partial_{x_1}F(Q)=\varrho_0\,\partial_{x_1x_0}F(Q)+\varrho_1\,\partial_{x_1x_1}F(Q)+\varrho_2\,\partial_{x_1x_2}F(Q)$$

$$0=(d-1)\partial_{x_2}F(Q)=\varrho_0\,\partial_{x_2x_0}F(Q)+\varrho_1\,\partial_{x_2x_1}F(Q)+\varrho_2\,\partial_{x_2x_2}F(Q)$$

$$M_F(Q)=\begin{pmatrix}\partial_{x_0x_0}F(Q) & \partial_{x_0x_1}F(Q) & \vdots\\ \partial_{x_1x_0}F(Q) & \partial_{x_\varphi x_1}F(Q) & \vdots\\ \partial_{x_2x_0}F(Q) & \partial_{x_2x_1}F(Q & \vdots\end{pmatrix}$$

$$\varrho_0\,M_F(Q)^{(1)}+\varrho_1\,M_F(Q)^{(2)}+\varrho_2\,M_F(Q)^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\downarrow$

prima colonna

$\Rightarrow$ le colonne di $M_F(Q)$ sono LIN. DIP.

$$\Rightarrow\ \det M_F(Q)=0=(\det M_F)(Q)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \| \ \ H_F(Q)$$

Adesso supp. $Q\in Z_p(F)$ punto semplice

e FLESSO.

$Q=(\varrho_0:\varrho_1:\varrho_2)$

Sia $R=(r_0:r_1:r_2)\in\mathbb{P}^2$ qualsiasi, $R\neq Q$

Retta $\overline{QR}$: il suo generico punto

$$=\mathbb{P}\left(\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}\varrho_0\\\varrho_1\\\varrho_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_0\\r_1\\r_2\end{pmatrix}\right)\right)$$

il generico punto di $\overline{QR}$: $\lambda Q+\mu R$, $(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}^1$

Cerco R t.c. $I_Q(F, \overline{QR}) \geq 3$

$\Rightarrow Q \in Z_p(F)$

$$F(\lambda Q + \mu R) = \overbrace{F(Q)}\cdot \lambda^d + \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{2} \partial_{x_i} F(Q)\, r_i\right)} \lambda^{d-1}\mu + $$

$\downarrow$

FORMULA DI TAYLOR OMOGENEA

$$= {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{2} \partial_{x_i x_j} F(Q)\, r_i r_j\right)} \lambda^{d-2}\mu^2 + \dots$$

$$= G(\lambda, \mu)$$

Q flesso $\Rightarrow I_Q(T_Q(F), F) \geq 3$

$$T_Q(F) \ : \ {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Se $\overline{QR} = T_Q(F)$, $R \in T_Q(F)$

Il punto Q corrisponde alla coppia $(1:0) = (\lambda:\mu)$

Q è flesso $\Leftrightarrow I_Q(F, \overline{QR}) \geq 3$

$\Leftrightarrow (1:0)$ è radice di molt. almeno 3 di $G(\lambda, \mu)$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum \partial_{x_i x_j} F(Q)\, r_i r_j = 0 \quad \forall R \text{ tale che}}$

$\boxed{\sum \partial_i F(Q)\, r_i = 0 \Leftrightarrow {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0}$

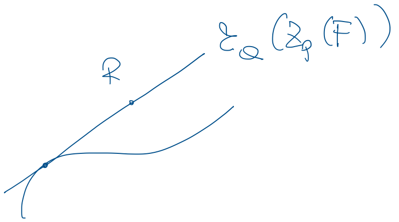
$\Leftrightarrow R \in$ retta $\underbrace{{}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0}_{= T_Q(Z_p(F))}$

se $R \in T_Q(Z_p(F))$

voglio cioè R annulla $\underbrace{\sum \partial_{x_i x_j} F(Q) \cdot x_i x_j = 0}$

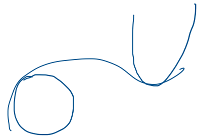
eq. di una CONICA F_Q

si chiama



CONICA OSCULATRICE

a $Z_p(F)$ in Q



$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_Q(Z_p(F)) \subseteq \Gamma_Q$ $\Rightarrow$ Γ_Q è una CONICA

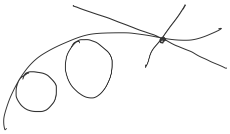
DEGENERE

$\Rightarrow$ det della $\underbrace{\text{matrice simmetrice}}_{= M_F(Q)}$

ass. a Γ_Q $= 0$

$\det\left(M_F(Q)\right) = 0$ $\Rightarrow$ $H_F(Q) = 0$

$= (\det M_F)(Q)$



Viceversa: se $Q \in Z_p(F) \cap Z_p(H_F)$; se Q sing. ok

$H_F(Q) = 0 = \det M_F(Q)$

Se Q è non singolare, cons. Γ_Q conica osc.

Γ_Q è degenere

Se dimostro che $\Gamma_Q \ni Q$ e che

$\Gamma_Q \supseteq \mathcal{T}_Q(Z_p(F))$, usando Taylor avrò

$I_Q(F, \mathcal{T}_Q) \geq 3$

Per Eulero: ${}^{t}Q \cdot M_F(Q) \cdot Q$

$$\underbrace{\boxed{\sum_{i,j} \partial_{x_i x_j} F(Q)\, q_i q_j \quad 9 \text{ termini}}}_{\Gamma_Q(Q)} = \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{2} \partial_{x_0 x_j} F(Q)\, q_j\right)}^{= (d-1)\, \partial_{x_0} F(Q)} q_0 + \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{2} \partial_{x_1 x_j} F(Q)\, q_j\right)}^{= (d-1)\, \partial_{x_1} F(Q)} q_1 +$$

$$+\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{2} \partial_{x_2 x_j} F(Q)\, q_j\right)}_{=(d-1)\,\partial_{x_2}F(Q)} q_2$$

$$= d\cdot F(Q)$$

$$=(d-1)\underbrace{\sum_{i=0}^{2} \partial_{x_i} F(Q)\, q_i}_{d\cdot F(Q)} = \underbrace{d\,(d-1)\,F(Q)}_{} = 0 \qquad Q \in Z_p(F)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_Q(Q) = 0.}$$

Osservo: le rette t_Q e Γ_Q in Q : $Q \notin \operatorname{Sing}\Gamma_Q$

Γ

In generale: conica piana con matrice A

eq. conica $\underbrace{(x_0\ x_1\ x_2)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{=F(x_0,\ x_1,\ x_2)} = 0$

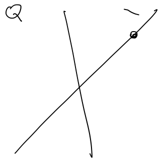
esercizio $\nabla F = 2\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\circ$

$${}^t\nabla F(Q)\cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{retta } t_Q$$

$${}^t\left(2\cdot A\cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right)\cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ cioè}$$

$$(q_0\ \ q_1\ \ q_2)\cdot \cancel{2}\ \underbrace{{}^tA\cdot}_{=A} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$



$$\boxed{\tau_Q \Gamma_Q \text{ ha } \underset{1\times 3}{(q_0\ q_1\ q_2)}\cdot \underset{3\times 3}{M_F(Q)}\cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = 0}$$

cioè: $\displaystyle\sum_{i,j} \partial_{x_i x_j} F(Q)\cdot q_i\ x_j = 0$

con Eulero: $\displaystyle = (d-1)\sum_{j=0}^{2} \partial_{x_i} F(Q)\, x_j = 0$

$$\overset{!}{=} (d-1)\cdot\ {}^t\nabla F(Q)\cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

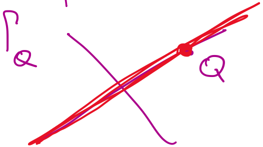
è anche eq. di $\tau_Q(Z_p(F))$

Inoltre: si ha che: o Q è sing.

$$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oppure}$$

$$\nabla F(Q) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T}_Q \Gamma_Q = \mathcal{T}_Q(\mathcal{Z}_p(F))$$

Ma per una conica riducibile, la tg. in un punto liscio = componente per quel punto



$$\Rightarrow \mathcal{T}_Q(\mathcal{Z}_p(F)) \subseteq \Gamma_Q$$

$\Rightarrow$ Q è FLESSO.

Taylor