Carl Friederich Gauss

Carl Friederich Gauss giovane

1– *I primi anni*

Molti sono stati i matematici che hanno compiuto grandiosi imprese e hanno dato un apporto straordinario alla disciplina ma in molti convengono che nell'Olimpo, dove soggiornano **Archimede** e **Newton**, ci sia posto solo per il tedesco **Gauss**.

Le origini di **Carl Friedrich**, che in molti oggi chiamano il *Re della Matematica*, sono tutt'altro che regali. Nato nella povertà a Braunschweig, in Germania, il 30 aprile del **1777** da un padre scrupolosamente onesto, grossolano e severo, che scoraggiò in tutti i modi il desiderio del figlio di dedicarsi agli studi, e da una madre che invece era comprensiva e appoggiò, fino alla fine dei suoi giorni, le decisioni e i desideri di Carl. A sua volta egli era un figlio rispettoso e obbediente; non criticò mai il padre per i suoi atteggiamenti anche se (forse) non ha provato mai un vero affetto nei suoi confronti.

Una prima figura importante per il suo sviluppo intellettuale la trovò all'interno della famiglia: il fratello della madre, Friederich. Costretto per necessità di denaro al mestiere del tessitore, Friederich era un uomo dotato di straordinario intelletto e cercò sempre di stimolare la fantasia del nipote, anche con l'uso di metodi non convenzionali.

La madre è stata sempre la sua più grande sostenitrice ma, forse, certe volte anche lei dubitava del talento del figlio. Una volta chiese a un suo compagno di studi, **Farkas Bolyai** (discreto matematico anche se il cognome Bolyai trova più successo nel figlio János), se Gauss avrebbe mai concluso qualcosa; a questa domanda Bolyai esclamò: *"Sarà il più grande matematico di tutta Europa"*.

Si parla spesso di talento precoce quando ci si imbatte in figure di un certo calibro, ma se si dovesse affibbiare a qualcuno il termine *enfant prodige* nessuno lo meriterebbe più di Gauss.

Siamo stati fortunati a godere del suo talento dato che un incidente gli costò quasi la vita nei suoi primissimi anni.

Una piena aveva fatto straripare il canale che fiancheggiava la casa dove viveva la sua famiglia; giocando vicino all'acqua Gauss ci cadde dentro e rischiò di annegare. Solo l'intervento di un operaio nelle vicinanze gli salvò la vita.

Il genio di Gauss si rivelò prima dei tre anni: il padre stava compilando il foglio della paga settimanale per i suoi operai e, una volta finito il calcolo, il piccolo bambino gli disse che il calcolo non era giusto e lo corresse; una rapida verifica dimostrò che Carl aveva ragione. In seguito diceva, scherzando, di aver imparato a contare prima di parlare.

Per tutta la vita ebbe una facilità prodigiosa nel calcolo mentale. A sette anni iniziò a frequentare la scuola locale dove il maestro non godeva di una buona nomea: era molto esigente e spesso terrorizzava gli alunni. Un giorno, nel tentativo di tenerli occupati per tutta la mattinata, assegnò l'esercizio di sommare i primi cento numeri e di posare la lavagnetta sul proprio banco quando si era arrivati alla soluzione. Quasi immediatamente Gauss posò la sua lavagnetta dicendo "Ligget se" (Fatto) e passò le successive ore a guardarsi intorno. Quando l'insegnante controllò la sua lavagna vide scritto solo il risultato (ovviamente esatto) 5050, senza alcun conto. All'epoca dell'accaduto Gauss aveva dieci anni e, forse, utilizzò la formula $n(n+1)/2$ per il calcolo della progressione aritmetica, senza che mai nessuno gli spiegasse questo argomento. Il maestro fu talmente meravigliato che cambiò i suoi atteggiamenti (almeno nei confronti di Gauss) comprando, di sua tasca, il miglior manuale di matematica disponibile e lo regalò al giovane genio.

Altra figura chiave della sua vita fu proprio l'assistente dell'insegnante, tale Johann Bartles. I due studiavano insieme, si confrontavano e si aiutavano a vicenda, facendo nascere un rapporto di amicizia che durò per tutta la vita di Bartles. Quest'ultimo aveva anche rapporti con persone influenti di Braunschweig, tra cui il duca Carlo Guglielmo Ferdinando che, nel **1791**, si decise a finanziare gli studi del giovane matematico.

In parallelo Gauss portava avanti anche un'enorme passione, che era quella delle lingue; impararle era per lui un passatempo e con l'avanzare dell'età diceva che questo studio era ottimo per mantenere lo spirito agile. Padroneggiava perfettamente le lingue classiche e a sessantadue anni si mise, da autodidatta, a studiare il russo arrivando a padroneggiarlo perfettamente dopo due anni e teneva una corrispondenza scientifica con i suoi amici russi nella loro lingua madre. Sembra che tentò di imparare anche il sanscrito ma lo abbandonò poco dopo perché lo trovava noioso. La filologia tentò di sedurre Gauss riuscendo quasi a portarlo lontano dalla strada della matematica.

2– *Inizio della produzione matematica*

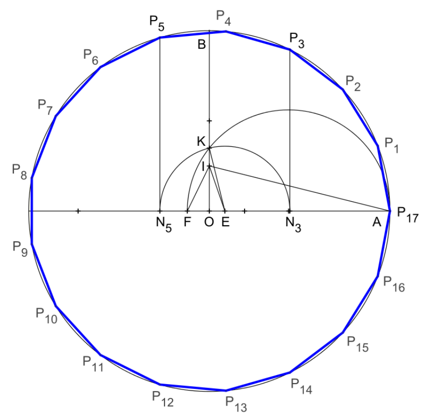
Il 30 marzo del **1796** è una data che può essere inserita tranquillamente in ogni libro di storia. Quel giorno avvennero due importanti eventi: Gauss decise di dedicarsi esclusivamente alla matematica e contemporaneamente dimostrò un risultato brillante.

Uno schizzo di Carl Friederich Gauss

• Da circa duemila anni si era in grado di costruire, con riga e compasso, il triangolo equilatero e il pentagono ma non si era riusciti a costruire nessun altro poligono regolare il cui numero di lati fosse un numero primo. Quel glorioso giorno di marzo Gauss costruì, secondo le regole euclidee (riga di lunghezza "infinita" e compasso che si chiuda ogni volta che lo si separa dal foglio) il *poligono di diciassette lati*. Gauss non solo scoprì il metodo di costruzione dell'eptadecagono, ma cercò di rispondere alla domanda "si può costruire qualsiasi poligono regolare con riga e compasso?" (v. parte finale delle *Disquisitiones*).

Il suo risultato fu ritenuto di importanza fondamentale da Gauss che chiese di raffigurare l'eptadecagono sulla sua pietra tombale. Per sua sfortuna, lo scalpellino si rifiutò affermando che la figura risultante sarebbe stata indistinguibile da un cerchio.

Tuttavia il poligono appare su un monumento a lui dedicato a Braunschweig.



L'eptadecagono

Nello stesso giorno iniziò a tenere un diario in cui annotava le sue maggiori scoperte. In totale il diario era composto da diciannove pagine e conteneva 146 enunciati estremamente brevi e uno più magnifico dell'altro. Questi risultati sono serviti per attestare la paternità di vari risultati proprio a Gauss, dato che la maggior parte dei suoi lavori non vennero pubblicati.

La prima data, 30 marzo 1796, recava la scoperta dell'eptadecagono; l'ultima è il 9 luglio 1814. Il diario rimase nascosto nelle carte di famiglia fino al 1898. Nel 1901 venne pubblicato a cura di **Felix Klein**. Il diario ora è depositato negli Archivi gaussiani, conservati a Braunschweig e a Göttingen.

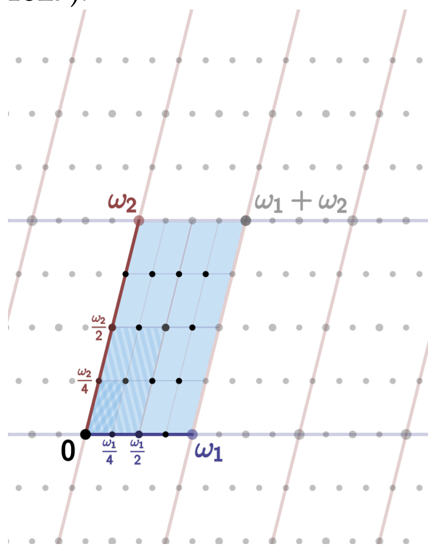
• Tra gli enunciati del suo diario deve essere citata la pagina del 10 luglio **1796** che recitava

$$\text{EYPHKA! num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

Era l'eco del grido di trionfo di Archimede: Gauss aveva scoperto che ogni intero positivo è dato dalla somma di tre numeri triangolari. Ricordiamo che un numero triangolare è della forma

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• Nella pagina che riportava la data 19 marzo **1797**, Gauss aveva già scoperto la *doppia periodicità delle funzioni ellittiche*. Tale scoperta, se pubblicata, sarebbe bastata a renderlo celebre ma egli non la diede mai alle stampe (fu pubblicata, indipendentemente da **Niels Abel** e da **Carl Jacobi** nel 1827).



Reticolo fondamentale

Ci sono varie motivazioni dietro la scelta di non pubblicare tutte le sue scoperte; lo stesso Gauss disse che era molto meticoloso nei suoi lavori e non ne rimaneva soddisfatto fino a che gli inutili prolissi non fossero stati eliminati. È verosimile pensare che Gauss si fosse deciso a seguire l'esempio di Archimede e Newton: lasciare soltanto opere ben definite e rigorosamente perfette. Sicuramente se avesse divulgato tutto ciò che sapeva, la matematica ne avrebbe tratto molteplici benefici. Dichiarò lui stesso che la sua mente a vent'anni era un turbinio di idee che egli stesso non era in grado di controllare.

3− *La produzione matematica della maturità*

• Una menzione di onore va fatta per il suo lavoro di tesi di dottorato (**1798** e pubblicata nel 1799) dal titolo *"Nuova dimostrazione che qualunque funzione algebrica razionale a una variabile può essere scomposta in fattori reali di primo o secondo grado"*. Il termine "nuovo" poteva essere riferito alla dimostrazione lacunosa di **d'Alembert** (**1740**). Infatti Gauss dette la prima dimostrazione completa di quello lui stesso chiamò (e che oggi è conosciuto come) *Teorema Fondamentale dell'Algebra*: un polinomio di grado n sul campo dei numeri complessi ammette esattamente n radici, eventualmente coincidenti.

Tale dimostrazione era basata su considerazioni geometriche. Ma Gauss non si accontentò, tanto che in seguito ne formulò altre tre: due nel **1816** e una nel **1850**, quest'ultima con metodi puramente algebrici.

• Gauss diede svariati contributi alla matematica ma elevò l'aritmetica superiore (cioè la *Teoria dei numeri*) a livelli mai raggiunti prima, convinto com'era che

"La matematica è la regina delle scienze
e l'aritmetica è la regina della matematica!"

Negli anni che vanno dal **1795** al **1798**, mentre frequentava l'Università di Göttingen, si addentrò nello studio della teoria dei numeri che culminò con la pubblicazione del suo primo capolavoro *Disquisitiones Arithmeticae* che, a causa delle difficoltà economiche dell'editore, venne pubblicato solo nel **1801**.

L'opera è divisa in sette sezioni ed è scritta in un latino di esemplare chiarezza e bellezza.

Le prime tre sezioni raccolgono essenzialmente teoremi già noti in precedenza (scoperti, tra gli altri, da **Fermat**, **Euler**, **Lagrange** e **Legendre**), tra cui il *Piccolo teorema di Fermat* e il *Teorema di Wilson*. Qui è presentato anche il primo riconoscimento esplicito, con una dimostrazione completa, del *Teorema fondamentale dell'aritmetica*, cioè l'unicità della fattorizzazione in primi dei numeri interi; in linguaggio moderno, provò che $\mathbb{Z}$ è un UFD (*Unique Factorization Domain*).

Una peculiarità di queste sezioni è che per la prima volta è presentata una trattazione sistematica di questi argomenti.

- Le prime tre parti trattano della teoria delle congruenze: se n è un numero naturale non nullo, due interi a e b sono *congruenti* modulo n se la differenza $(a-b)$ è un multiplo di n; Gauss introduce la notazione usata ancora oggi:

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Di questo studio approfondito va citata la congruenza binomiale

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

se p è un numero primo.

- Cercò di formulare teoremi per congruenze specifiche, ma per farlo dovette estendere il concetto di "intero" ai numeri "complessi interi", come $a + ib$, dove a e b sono interi. Nell'ambito degli *interi gaussiani*, oggi denotati con $\mathbb{Z}[i]$, Gauss formulò e dimostrò il *Teorema fondamentale dell'aritmetica* (cioè che $\mathbb{Z}[i]$ è UFD).

- Nella quarta parte Gauss sviluppa la teoria del residuo quadratico; in esse si trova la prima dimostrazione completa della *legge di reciprocità dei quadrati*; nella quinta le *forme quadratiche binarie* mentre nella sesta sono presenti due diversi test di primalità. Infine, nella settima e ultima parte, che molti considerano il coronamento dell'opera, è sviluppata un'analisi delle radici dell'unità (cioè delle soluzioni di $x^n = 1$, con n qualunque intero).

L'opera si conclude con il criterio per stabilire quali poligoni regolari sono costruibili con riga e compasso: qui è presentata la costruzione dell'*eptadecagono regolare*, scoperta da Gauss alcuni anni prima. Ma, fatto ancora più rilevante, Gauss dimostra un teorema generale espresso tramite i *Numeri Primi di Fermat*, cioè della forma $F_n = 2^{2^n} + 1$. Più precisamente

Un poligono regolare di N lati può essere costruito con riga e compasso se e solo se il numero dei lati è

$$N = 2^k\, p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r$$

dove $p_1, \ldots, p_r$ sono primi di Fermat *distinti.*

Un problema, lasciato irrisolto perfino da Gauss, consiste nello stabilire se i primi di Fermat siano in numero finito. **Fermat** credeva, erroneamente, che tutti i numeri F_n fossero numeri primi. Questo è vero per i primi cinque interi ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) ma, nel **1732**, **Euler** dimostrò che per $n = 5$ il numero ottenuto F_5 non era primo. A oggi se ne conoscono solo questi cinque:

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65537.$$

Nel capolavoro *Disquisitiones* Gauss tesse in un'unica tela l'aritmetica, l'algebra e la geometria.

Alcuni tra i migliori matematici si congratularono per la straordinaria opera scritta da Gauss, tra cui **Lagrange** che disse *"Le vostre Disquisitiones vi hanno sollevato di colpo all'altezza dei sommi matematici e io ritengo che la loro ultima parte racchiuda le più belle scoperte analitiche che siano state fatte da moltissimo tempo"*.

• Gauss congetturò, indipendentemente da Legendre, il *Teorema dei numeri primi* che mette in relazione la distribuzione di questi con la funzione logaritmica. Scrisse sulla copertina di un manualetto sui logaritmi, usato quando era uno scolaretto di 14 anni,

$$\text{Primezahlen unter } a\ (= \infty)\ \frac{a}{\ln a}.$$

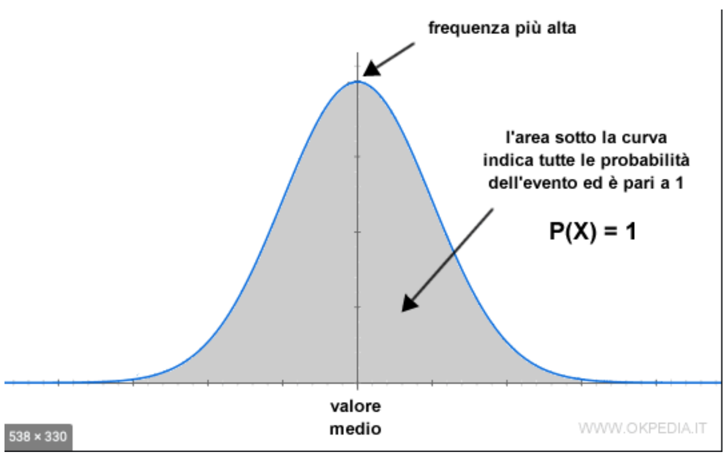
Dopo averlo annotato, Gauss non pubblicò questo eccezionale risultato. Non sappiamo se ne avesse o meno una dimostrazione. Il teorema sarà dimostrato completamente solo nel 1894 da **Jacques Hadamard** e **Charles de La Vallée-Poussin**.

• Gauss fu anche un grande statistico.

La *curva normale* è usata continuamente in molti ambiti diversi per produrre e organizzare conoscenza: dalla medicina all'astronomia, dalla psicologia alle scienze motorie. Questo perché è la distribuzione che tipicamente si associa ai fenomeni casuali. Inoltre, per il teorema del limite centrale, a essa tendono le altre distribuzioni quando il numero dei casi osservati diventa molto grande.

Gauss nell'opera *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (**1809**) è stato il primo a ricavare la formula di tale distribuzione nell'ambito dei suoi studi sulle curve di errore nelle traiettorie degli asteroidi. Per questo motivo la "curva normale" è anche chiamata "curva degli errori accidentali" o *curva gaussiana*, la cui equazione è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Curva gaussiana

4– *L'astronomia e la fama*

Carl Friederich Gauss adulto

Anche se aveva affermato che la regina della matematica era l'aritmetica, Gauss l'abbandonò all'inizio del XIX secolo, attratto da molti altri interessi. Primo fra tutti l'astronomia.

Quello che portò alla ribalta mondiale Carl Gauss fu la determinazione dell'orbita del *pianeta Cerere*. Questo nuovo pianeta, che poi si scoprì appartenere alla classificazione degli asteroidi (oggi classificato come *pianeta nano*), fu avvistato il 1 Gennaio 1801 dall'astronomo italiano Giuseppe Piazzi, ma si trovava in una posizione che rendeva la sua osservazione particolarmente difficile.

Gauss si impegnò nella risoluzione di equazioni estremamente complesse ma Cerere fu ritrovata al posto preciso che i calcoli del giovane Gauss avevano predetto.

La gloria arrivò rapidamente, tanto che **Laplace** (uno tra i più importanti astronomi e fisici francesi nel periodo napoleonico) lo proclamò come suo pari e, qualche tempo dopo, come suo superiore.

Una volta il barone Von Humboldt intraprese una conversazione con Laplace:

"Chi è, secondo vostro parere, il matematico più grande della Germania?" domandò il barone.

"Pfaff", rispose Laplace.

"E Gauss?"

"Oh, Gauss è il più grande matematico del mondo!"

Gauss aveva un carattere un po' freddo e tendeva a non elogiare né i suoi lavori né i lavori dei suoi colleghi matematici. Era però molto cordiale nella corrispondenza e nelle relazioni scientifiche con le persone che lo consultavano, a patto che queste fossero mosse da un vero desiderio di conoscenza.

La corrispondenza con **Sophie Germain**, matematica francese, provava anche quanto fosse di larghe vedute riguardo al delicato tema delle donne che si occupavano di scienza, fatto non banale per un uomo della sua epoca.

Sophie Germain a 14 anni

Dopo aver calcolato la traiettoria di Cerere, Gauss fu nominato direttore dell'*Osservatorio di Göttingen* nel **1807**, posto che ricoprì per 40 anni. Avrebbe potuto facilmente ottenere una cattedra di matematica all'università, ma l'insegnamento non ricadeva propriamente nei suoi gusti, anche se teneva saltuariamente dei corsi. Qualche volta si lasciava andare a commenti tutt'altro che benevoli, specie su studenti che lo distoglievano dalle sue preziose ricerche. Infatti, nel 1810, Gauss scrisse al suo amico e astronomo Friedrich Bessel:

"Quest'inverno terrò due corsi a tre studenti, uno dei quali ha una preparazione mediocre, l'altro meno che mediocre e il terzo manca totalmente sia di preparazione che di capacità. Questi sono i pesi che deve portare un matematico".

• Ma ci furono anche personalità che dubitavano della parola di Gauss: uno su tutti il matematico francese **Legendre**. Quest'ultimo voleva la paternità del *metodo dei minimi quadrati*, alludendo al fatto di aver pubblicato tale procedimento nel 1806, prima di Gauss.

Si riferiva a *Theoria motus* (**1809**), dove Gauss trattava di astronomia utilizzando anche il *metodo dei minimi quadrati*. Indignatissimo, Legendre scrisse al matematico tedesco accusandolo di disonestà e deplorando che uno scienziato così ricco di scoperte potesse ridursi ad appropriarsi dei lavori degli altri. D'altra parte, Gauss affermava di aver preceduto Legendre di almeno dieci anni; in una lettera disse: *"Ho comunicato tutti i risultati a Olbers* [un amico e astronomo] *nel 1802"*, fornendo la prova conclusiva a questa disputa.

Disgraziatamente Legendre continuò e insinuò i suoi sospetti in **Jacobi** e impedì che il giovane matematico annodasse relazioni con Gauss. Le "coincidenze" continuarono e Legendre scoprì di essere preceduto da Gauss, che aveva l'impressione che fosse il contrario.

5− *Geometrie*

• Nel **1811** comunicò al suo amico Bessel (astronomo) una sua scoperta fondamentale nella nuova disciplina della "teoria delle funzioni di una variabile complessa". Gauss intuì e scrisse un risultato, noto oggi come *Teorema di Cauchy*:

Sia $f(z)$ una funzione regolare all'interno di un dominio aperto E semplicemente connesso. Allora per ogni curva chiusa γ, regolare a tratti, tutta contenuta in E, si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

• Ma l'innovazione più importante del secolo in geometria furono le *geometrie non euclidee*. Gauss, cercando di dimostrare il V postulato di Euclide, nel **1824** arrivò alla rivoluzionaria conclusione che potevano esistere geometrie indipendenti dal postulato e iniziò a studiare la geometria iperbolica. Se avesse sviluppato e pubblicato questi studi, avrebbe potuto essere definito l'inventore delle *geometrie non-euclidee*. Indipendentemente, il suo amico **Janos Bolyai** sviluppò lo stesso tipo di geometria iperbolica.

• Sempre Gauss diede inizio a nuovo settore, la *geometria differenziale*, nel trattato *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (**1827**), estendendo la nozione di curvatura di una curva piana (**Huygens** e **Clairaut**) alle superfici. Definì infatti la curvatura di una superficie in un suo punto, la cosiddetta *curvatura gaussiana*.

6– *Ancora numeri complessi*

Il termine *immaginario* venne utilizzato per la prima volta da **Descartes** nel XVII secolo e ben rappresenta la titubanza dei matematici dell'epoca verso questi nuovi numeri che "non dovrebbero esistere".

Nel XVIII secolo i lavori di **de Moivre**, a cui si deve la formula che porta il suo nome (1739), e di **Euler**, a cui si deve la *formula di Eulero* per l'analisi complessa (1748), hanno iniziato a fornire a tali numeri una base teorica, ma la loro esistenza non è stata accettata completamente fino alla loro interpretazione geometrica.

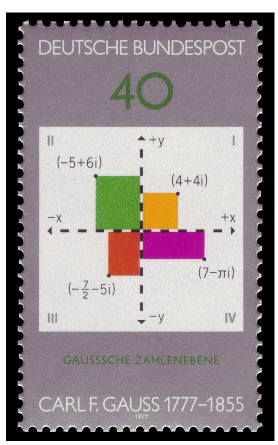
- L'idea della rappresentazione grafica dei numeri complessi era stata accennata da **John Wallis** nel suo *De Algebra tractatus* (1685).

- **Caspar Wessel** (1745-1818), matematico danese, su tale argomento scrisse la sua opera principale *Om directionens analytiske betegning* presentata negli atti dell'Accademia di Copenhaghen del 1799. Tale opera è chiara e completa, anche paragonata alla moderna teoria. Essendo però scritta in lingua danese, venne pressoché ignorata.

- Nel 1806 anche l'**abate Buée** arriva alla stessa idea suggerita da Wallis, cioè che quel $\pm\sqrt{-1}$ dovrebbe rappresentare una linea posta a metà tra un numero e il suo negativo e che la linea dovesse essere perpendicolare all'asse reale.

- Nello stesso anno **Jean-Robert Argand** pubblicò un opuscolo sul medesimo argomento. È a questo saggio che si deve il fondamento scientifico per la rappresentazione grafica dei numeri complessi.

- Gauss, ritenendo la teoria sconosciuta, scrisse il saggio *Theoria residuorum biquadraticorum* pubblicato nel **1832**, portando il mondo matematico a conoscenza della rappresentazione geometrica dei numeri complessi su di un piano, oggi chiamato *Piano di Argand–Gauss*.



Francobollo commemorativo per il 200mo anniversario della nascita: il piano complesso

Con Gauss la teoria dei numeri complessi ha avuto un'espansione notevole e la loro rappresentazione rafforzò la confidenza dei matematici con questi numeri, ora visualizzabili come punti di un piano; pertanto le vecchie idee sulla non esistenza dei numeri immaginari furono presto abbandonate.

7− ***Gli ultimi anni***

Gauss va ricordato anche per i suoi notevolissimi contributi alla fisica, avendo pubblicato lavori in astronomia, geodesia, capillarità, cristallografia. Significativi furono i suoi risultati nel magnetismo terrestre e l'invenzione di strumenti magnetici: l'unità di intensità di un campo magnetico viene oggi chiamata *gauss*.

Collaborò col fisico Weber alla costruzione del primo telegrafo elettromagnetico.

Ancora nel **1840** scrive un trattato sulla rifrazione della luce.

Durante la sua carriera fu inondato di onorificenze. Lucido di mente e prolifico nelle scoperte, Gauss non aspirava ancora al riposo quando, qualche mese prima della sua morte, si manifestarono i primi sintomi della sua malattia: cardiomegalia con sintomi di idropisia. Continuò a lavorare quando la malattia gli dava tregua, anche se soffriva di crampi alle mani.

23 febbraio 1855

Gauss finì tranquillamente i suoi giorni all'alba del 23 febbraio **1855**, all'età di settantotto anni.

Quando ebbe l'occasione di trovare studenti motivati e capaci, Gauss dedicò molto tempo a dar loro consigli e supporto. Basta citare alcuni dei suoi studenti che divennero importanti matematici: **Richard Dedekind**, **Bernhard Riemann** e **Friedrich Wilhelm Bessel**; **Sophie Germain** fu raccomandata da Gauss affinché ricevesse anche lei la laurea *honoris causa* dall'università di Göttingen.