Gauss e la geometria differenziale

In geometria differenziale, la *curvatura gaussiana* è "una" misura della curvatura di una superficie in un punto.

Precisamente, la curvatura gaussiana K in un punto P di una superficie contenuta nello spazio euclideo è definita come il *prodotto delle due curvature principali* in P:

$$K = k_1\, k_2.$$

Ricordiamo le nozioni utilizzate.

Definizione. Sia $S \subset \mathbb{E}^3$ una superficie e $P \in S$. Le due *curvature principali* k_1 e k_2 di S in P sono il massimo e il minimo della curvatura di una curva contenuta nella superficie e passante per P.

Definizione. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^3$ una curva e $P \in \mathcal{C}$. La *curvatura* di $\mathcal{C}$ in P è il reciproco del raggio del cerchio osculatore a $\mathcal{C}$ in P.

E' noto che i valori delle curvature principali dipendono da come la superficie è immersa nello spazio ambiente. Ci si aspetterebbe che accadesse lo stesso per il loro prodotto …

La curvatura gaussiana, invece, a differenza delle curvature principali, è una curvatura intrinseca: dipende cioè soltanto dalle distanze fra punti e non da come la superficie sia contenuta nello spazio tridimensionale.

Il risultato è stato scoperto da Carl Friedrich Gauss e pubblicato nel 1827 nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, enunciato nel seguente modo:

Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.

È chiamato dallo stesso Gauss *Theorema egregium* per via dell'importanza del risultato, tutt'altro che intuitivo e di grande valore.

Theorema egregium.

La curvatura gaussiana è una grandezza intrinseca di una superficie, conservata dalle trasformazioni isometriche locali.

Il punto-chiave della dimostrazione risiede in una formulazione equivalente della curvatura gaussiana attraverso le derivate seconde di una parametrizzazione della superficie.

Una delle conseguenze immediate del teorema è il fatto che superfici con differente curvatura gaussiana non possono essere fra loro isometriche. Ad esempio, una sfera e un piano.