Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3, a.a. 2018/19

Il *Theorema Egregium* di Gauss

Alberto Albano

In queste note diamo una dimostrazione del *Theorema Egregium* di Gauss, che afferma che la curvatura Gaussiana di una superficie è invariante per isometrie.

La dimostrazione è molto simile a quelle che si trovano sul do Carmo (Capitolo 4-2 per la isometrie, Capitolo 4-3 per il teorema di Gauss), sull'Abate-Tovena (Capitolo 4.1 per le isometrie, Capitolo 4.6 per il teorema di Gauss) e sul Postnikov (Lezione 3, in particolare Definizione 6 e Proposizione 1 per le isometrie, Lezione 5 fino al Teorema 1 per il teorema di Gauss).

Supponiamo noti i concetti di superficie parametrizzata, prima e seconda forma fondamentale, la definizione della curvatura Gaussiana in termini dell'operatore forma e la formula della curvatura in termini delle due forme fondamentali. Per tutti questi argomenti, consultare uno qualunque dei libri citati in precedenza. Continueremo ad usare le notazioni del do Carmo e in particolare denotiamo i coefficienti della seconda forma con le lettere e, f, g.

1 Isometrie e prima forma fondamentale

Scopo di questo primo paragrafo è di mettere in rilievo l'importanza della prima forma fondamentale nello studio delle isometrie fra superfici.

Sia S una superficie regolare. Possiamo definire su S una distanza *intrinseca*, considerando cioè solo i punti di S e non quelli di $\mathbb{R}^3$, nel seguente modo: per ogni $p, q \in S$ poniamo

$$d(p, q) = \inf_C \{\ell(C)\}$$

dove $\ell(C) =$ lunghezza dell'arco di curva C e l'estremo inferiore è preso sull'insieme di tutte le curve su S che uniscono p e q.

Proposizione 1.1. *d è una distanza su S.*

Dimostrazione. È chiaro che d è simmetrica. Poiché $d(p, q) \geq \|q - p\|$ (dove $\|q - p\|$ è la distanza euclidea in $\mathbb{R}^3$), si ha anche che $d(p, q) \geq 0$ ed è nulla se e solo se $p = q$.

Poiché le curve che uniscono p e r passando per q fanno parte dell'insieme su cui si prende l'inf per calcolare $d(p, r)$ si ha che $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$. Dunque d soddisfa anche la diseguaglianza triangolare ed è quindi una distanza. $\square$

In particolare, S diventa uno spazio topologico e una delle condizioni che S sia una superficie regolare è esattamente che questa topologia sia la stessa che ha come sottospazio di $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea.

Vogliamo ora definire il concetto di *isometria* fra superfici. Di solito un'isometria è una funzione che conserva le distanze fra i punti. Poiché la distanza fra due punti su una superficie è definita usando le lunghezze delle curve che congiungono i due punti appare ragionevole definire il concetto di isometria mediante la lunghezza delle curve. Diamo quindi la seguente:

Definizione 1.2. Sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo fra le superfici M e N. f è una *isometria* se per ogni curva C tracciata su M si ha

$$\ell(C) = \ell(f(C))$$

dove $f(C)$ è la curva su N immagine mediante f di C e $\ell(C)$ è la lunghezza della curva C.

È chiaro che una isometria secondo questa definizione conserva le distanze fra i punti. Osserviamo anche che l'ipotesi che f sia un diffeomorfismo non è (troppo) restrittiva in quanto una funzione che conserva le distanze è comunque iniettiva e quindi biiettiva con la sua immagine. La vera restrizione è che chiediamo che l'inversa sia ancora differenziabile, e cioè che il differenziale df_p sia invertibile in ogni punto.

Analizziamo il significato di questa definizione, scrivendo il diffeomorfismo f in coordinate locali: siano $D \subset \mathbb{R}^2$ e $E \subset \mathbb{R}^2$ due aperti connessi del piano. Indicheremo con (u_1, v_1) le coordinate in D e con (u_2, v_2) le coordinate in E.

Siano ora $\mathbf{x} : D \to M \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} : E \to N \subset \mathbb{R}^3$ due parametrizzazioni regolari. La funzione $f : M \to N$ induce (in modo unico, poiché $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono biiettive sulle loro immagini) una funzione $\bar{f} : D \to E$, data da $\bar{f} = \mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}$, che scriviamo in coordinate come:

$$\bar{f}(u_1, v_1) = (u_2(u_1, v_1), v_2(u_1, v_1))$$

Il diagramma è

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ D \arrow[u, "\mathbf{x}"] \arrow[r, "\bar{f}"'] & E \arrow[u, "\mathbf{y}"'] \end{tikzcd}$$

e poiché f è un diffeomorfismo, anche $\bar{f}$ lo è.

Facciamo ora un'osservazione importante, che semplificherà molto i calcoli successivi. La matrice del differenziale df_P dipende ovviamente dalle parametrizzazioni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ che usiamo per descrivere le superfici M e N.

Lemma 1.3. *Se f è un diffeomorfismo, è sempre possibile effettuare un cambiamento di coordinate (e cioè cambiare le parametrizzazioni locali) in modo che la matrice di df_p sia la matrice unità, identicamente in p.*

Dimostrazione. Nel diagramma commutativo precedente, $\bar{f}$ è un diffeomorfismo e può essere interpretato come un cambiamento di coordinate. Il diagramma può essere allora riscritto come:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
 & E \arrow[u, "\mathbf{y}"'] \\
D \arrow[uu, "\mathbf{x}"] \arrow[r, "\bar{g}=\mathrm{id}"'] & D \arrow[u, "\bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

In queste nuove coordinate, le parametrizzazioni sono $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \circ \bar{f}$ e f è rappresentata da $\bar{g}$ cioè l'identità. Quindi in queste coordinate si ha in ogni punto $p \in M$:

$$df_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

Il differenziale $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ è un'applicazione lineare fra spazi vettoriali euclidei e vogliamo studiare sotto quali condizioni sia un'isometria di spazi vettoriali. Sia dunque

$$\mathbf{v} = a\mathbf{x}_{u_1} + b\mathbf{x}_{v_1} \in T_pM$$

e

$$df_p(\mathbf{v}) = c\mathbf{y}_{u_2} + d\mathbf{y}_{v_2} \in T_{f(p)}N$$

la sua immagine. Si ha:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = E_1a^2 + 2F_1ab + G_1b^2$$
$$\|df_p(\mathbf{v})\|^2 = E_2c^2 + 2F_2cd + G_2d^2$$

dove E_1, F_1, G_1 sono i coefficienti della prima forma fondamentale di M e E_2, F_2, G_2 sono i coefficienti della prima forma fondamentale di N. Se scegliamo coordinate locali $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ come nel lemma allora $a = c$ e $b = d$ perché il differenziale di df_p è rappresentato dalla matrice unità e quindi

$$\|\mathbf{v}\|^2 = E_1a^2 + 2F_1ab + G_1b^2$$
$$\|df_p(\mathbf{v})\|^2 = E_2a^2 + 2F_2ab + G_2b^2$$

per ogni a, b e questo implica $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$. Abbiamo dunque dimostrato la:

Proposizione 1.4. *Sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo. Le applicazioni lineari df_p sono isometrie di spazi vettoriali (per ogni p) se e solo se esistono coordinate locali su M e N tali che $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$ (a meno dei nomi delle variabili).*

Torniamo ora alle isometrie fra superfici e scriviamo in coordinate locali cosa significhi essere un'isometria. La curva C è data da una funzione $\alpha : [a, b] \to D$ della forma:

$$u_1 = u_1(t), \quad v_1 = v_1(t) \qquad a \leq t \leq b$$

e quindi su M la curva è data dalla parametrizzazione $\mathbf{x}(\alpha(t))$. La sua immagine su N è data da $f(\mathbf{x}(\alpha(t))) = \mathbf{y}(\bar{f}(\alpha(t)))$. Possiamo scrivere la parametrizzazione $\bar{f}(\alpha(t)) : [a, b] \to E$ come

$$u_2 = u_2(t), \quad v_2 = v_2(t) \qquad a \leq t \leq b$$

dove naturalmente $(u_2, v_2) = \bar{f}(u_1, v_1)$. La condizione che la curva C e la curva $f(C)$ abbiano la stessa lunghezza si scrive quindi come:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \sqrt{E_1(t)u_1'(t)^2 + 2F_1(t)u_1'(t)v_1'(t) + G_1(t)v_1'(t)^2}dt \\ = &\int_a^b \sqrt{E_2(t)u_2'(t)^2 + 2F_2(t)u_2'(t)v_2'(t) + G_2(t)v_2'(t)^2}dt \end{aligned}$$

Da questa uguaglianza è possibile dedurre il seguente importante teorema:

Teorema 1.5. *Un diffeomorfismo $f : M \to N$ è un'isometria se e solo se il differenziale $df_p : T_pM \to T_qN$, dove $q = f(p)$, è un'isometria di spazi vettoriali per ogni $p \in M$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che il diffeomorfismo f sia rappresentato in coordinate locali dall'identità ($\bar{f} = \mathrm{id}$). In questo caso le curve C e $f(C)$ hanno la stessa espressione in coordinate locali. Se il differenziale di f è un'isometria, per quello che abbiamo osservato prima si ha $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$. Dunque gli integrali che esprimono le lunghezze di C e $f(C)$ sono identici (a meno dei nomi delle variabili) e quindi f conserva le lunghezze di tutte le curve e cioè f è un'isometria.

Per dimostrare l'implicazione opposta, supponiamo ancora che f sia rappresentato in coordinate locali dall'identità. Allora per ogni parametrizzazione regolare $(u(t), v(t))$ di una curva C su M si ha:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \sqrt{E_1(t)u'(t)^2 + 2F_1(t)u'(t)v'(t) + G_1(t)v'(t)^2}dt \\ = &\int_a^b \sqrt{E_2(t)u'(t)^2 + 2F_2(t)u'(t)v'(t) + G_2(t)v'(t)^2}dt \end{aligned}$$

Notiamo che per l'ipotesi fatta su $\bar{f}$ si ha $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, e quindi non usiamo gli indici per distiguere le coordinate locali. L'identità precedente vale per ogni estremo superiore di integrazione b. Derivando allora rispetto a b (e sostituendo poi b con t) si ha

$$\begin{aligned} &E_1(t)u'(t)^2 + 2F_1(t)u'(t)v'(t) + G_1(t)v'(t)^2 \\ = &E_2(t)u'(t)^2 + 2F_2(t)u'(t)v'(t) + G_2(t)v'(t)^2 \end{aligned}$$

Questa identità deve valere per tutte le curve, e in particolare per le curve della forma

$$u(t) = u_0 + \alpha t, \quad v(t) = v_0 + \beta t, \qquad |t| < \epsilon$$

dove $(u_0, v_0) \in D$ è arbitrario, α, β sono due numeri reali arbitrari e ϵ è sufficientemente piccolo (in modo che il segmento descritto da queste equazioni parametriche sia tutto contenuto in D). Calcolando allora per $t = 0$ si ottiene che per ogni α, β si ha:

$$E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2 = E_2\alpha^2 + 2F_2\alpha\beta + G_2\beta^2$$

dove $E_1, \ldots$ sono i valori delle funzioni $E_1(t), \ldots$ nel punto (u_0, v_0). Questo è possibile solo se $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$ e quindi i differenziali df_P sono delle isometrie per ogni P. □

Combinando i risultati fin qui ottenuti (Proposizione 1.4 e Teorema 1.5) abbiamo:

Teorema 1.6. *Due superfici M e N sono isometriche se e solo se è possibile trovare delle coordinate locali su di esse in modo che le prime forme fondamentali delle due superfici coincidano.*

Se abbiamo due superfici per cui, nelle parametrizzazioni assegnate, le prime forme fondamentali coincidono allora le due superfici sono isometriche. Però, se le prime forme fondamentali non coincidono, le superfici potrebbero lo stesso essere isometriche (esempio: elicoide e catenoide) e non è semplice in generale trovare le (eventuali) coordinate locali che stabiliscono l'isometria. Abbiamo quindi bisogno di un invariante più semplice che sia in grado di stabilire se due superfici NON sono isometriche. Questo invariante è la curvatura Gaussiana, di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

2 Il *Theorema Egregium*

Sia M una superficie regolare orientabile e sia $p \in M$ un suo punto. Ricordiamo che l'*operatore forma* in p è l'endomorfismo $S_p : T_pM \to T_pM$ definito come $S_p = -d\mathbf{N}_p$, dove $\mathbf{N} : M \to S^2$ è la mappa di Gauss. Se la matrice di S_p nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ è

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dall'uguaglianza matriciale $S_p = -d\mathbf{N}_p = I_p^{-1} II_p$ abbiamo le formule:

$$a_{11} = \frac{Ge - Ff}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{Ef - Fe}{EG - F^2}$$
$$a_{12} = \frac{Gf - Fg}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{Eg - Ff}{EG - F^2}$$

dove

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

e

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

sono i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

Per definizione la curvatura Gaussiana K è il determinante dell'endomorfismo S_p e quindi è una funzione a valori reali

$$K : M \to \mathbb{R}$$

che *non dipende dalle coordinate locali.* Usando le formule precedenti per calcolare il determinante si ottiene la formula:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

che mostra come la curvatura Gaussiana dipenda dalla prima e dalla seconda forma fondamentale. Sappiamo che la prima forma è invariante per isometrie, ma questo non è vero per la seconda forma (esempio: piano e cilindro). Per ottenere il *Theorema Egregium* faremo vedere che in realtà K dipende solo dai coefficienti della prima forma e dalle loro derivate.

Sia $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$ il campo normale della superficie M. Poiché $\|\mathbf{N}\| \equiv 1$, le derivate $\mathbf{N}_u$, $\mathbf{N}_v$ (calcolate in p) sono ortogonali a $\mathbf{N}$ e quindi appartengono al piano tangente T_pM. Ricordando che, per definizione di operatore forma, si ha $S_p(\mathbf{x}_u) = -\mathbf{N}_u$, $S_p(\mathbf{x}_v) = -\mathbf{N}_v$ possiamo scrivere:

$$\mathbf{N}_u = \frac{-Ge + Ff}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_u + \frac{-Ef + Fe}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_v \tag{1}$$

$$\mathbf{N}_v = \frac{-Gf + Fg}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_u + \frac{-Eg + Ff}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_v \tag{2}$$

(Notare i segni scambiati rispetto alla matrice dell'operatore forma S_p). I vettori $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$, e inoltre $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} = 0$. Possiamo perciò scrivere i vettori derivate seconde come segue:

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\mathbf{N} \tag{3}$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + f\mathbf{N} \tag{4}$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + g\mathbf{N} \tag{5}$$

dove i Γ^k_{ij} sono opportune funzioni di u, v che sono detti *simboli di Christoffel* o *coefficienti della connessione.*

Per prima cosa osserviamo che i coefficienti di $\mathbf{N}$ che compaiono sono effettivamente i coefficienti della seconda forma fondamentale. Per dimostrarlo basta calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N}, \ldots$ e usare la definizione di seconda forma fondamentale. Determiniamo ora i termini Γ^k_{ij}.

Derivando rispetto a u e v la relazione $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, si ottiene:

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}E_u, \quad \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2}E_v$$

e allo stesso modo derivando $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ si ha:

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2}G_u, \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2}G_v$$

Derivando ora $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$, e usando le relazioni precedenti si ottiene:

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

Moltiplicando scalarmente l'equazione (3) per $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ e usando le relazioni precedenti si ottiene il sistema

$$\begin{cases} E\,\Gamma^1_{11} & + & F\,\Gamma^2_{11} & = & \dfrac{1}{2}\,E_u \\ F\,\Gamma^1_{11} & + & G\,\Gamma^2_{11} & = & F_u - \dfrac{1}{2}\,E_v \end{cases}$$

da cui si vede che Γ^1_{11} e Γ^2_{11} dipendono solo da E, F, G e le loro derivate prime. Moltiplicando allo stesso modo le equazioni (4) e (5) si ottengono tutti gli altri simboli di Christoffel. Non scriviamo in dettaglio il risultato perché non ci servirà. L'unica cosa che serve è che tutti i Γ^k_{ij} dipendono solo dalla prima forma fondamentale e dalle sue derivate.

I simboli di Christoffel sono stati ottenuti in modo simile alla curvatura e torsione di una curva e cioè scrivendo le derivate seconde in termini di una base di $\mathbb{R}^3$ formata dalle derivate prime. Il teorema fondamentale della teoria locale delle curve ci assicura che non ci sono restrizioni sulla curvatura e sulla torsione: ogni coppia di funzioni è la coppia (k, τ) di una curva.

Invece, non tutte le funzioni possono essere simboli di Christoffel di una superficie. Oltre l'ovvia condizione $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ (che non abbiamo nemmeno messo in evidenza perché sappiamo che $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ e quindi i relativi coefficienti sono uguali), ci sono altre condizioni che si ottengono considerando derivate miste di ordine superiore.

Di tutte le derivate miste possibili, calcoliamo ora la derivata terza $\mathbf{x}_{uuv}$ e scriviamola in termini della base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$

$$\mathbf{x}_{uuv} = \alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v + \gamma \mathbf{N}$$

Possiamo calcolare in due modi, ottenendo lo stesso risultato: $(\mathbf{x}_{uu})_v$ derivando rispetto a v la relazione (3) oppure $(\mathbf{x}_{uv})_u$ derivando rispetto a u la relazione (4). In entrambi i casi metteremo in evidenza solo il coefficiente β di $\mathbf{x}_v$ e tralasceremo gli altri termini. Inoltre scriveremo tutti i termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale solo come $(\dots)$, senza calcolare la loro espressione esatta.

Prima di iniziare il calcolo, osserviamo che le altre derivate miste possibili e i coefficienti degli altri termini danno delle ulteriori relazioni sui simboli di Christoffel. Per il risultato che ci interessa basta questa. Ce ne sono altre due, dette *equazioni di Mainardi-Codazzi* e si può dimostrare il *Teorema di Bonnet* che afferma che date sei funzioni E, F, G, e, f, g che soddisfano la condizione di Gauss e le equazioni di Codazzi-Mainardi, esiste una unica superficie che ha E, F, G, e, f, g come prima e seconda forma fondamentale. Trovate questo teorema, con la sua dimostrazione, sul do Carmo, Appendice al Capitolo 4.

Dunque dalla (3) si ha:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_{uu})_v &= \left[\Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\mathbf{N}\right]_v \\ &= \left(\Gamma^1_{11}\right)_v \mathbf{x}_u + \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_{uv} + \left(\Gamma^2_{11}\right)_v \mathbf{x}_v + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_{vv} + e_v\mathbf{N} + e\mathbf{N}_v \end{aligned}$$

Il primo e il quinto termine non contribuiscono a β. Invece

$$\mathbf{x}_{uv} = \dots + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + \dots$$

e

$$\mathbf{x}_{vv} = \dots + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + \dots$$

dove i termini non scritti non contribuiscono a β. Dunque il secondo, terzo e quarto termine contribuiscono a β solo mediante simboli di Christoffel e loro derivate e dunque solo con termini che dipendono dalla prima forma fondamentale. Invece l'ultimo termine si scrive:

$$e\mathbf{N}_v = e\frac{-Eg + Ff}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_v + \dots$$

dove il termine non scritto non contribuisce a β. Dunque:

$$\beta = e\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} + (\text{termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale})$$

Derivando allo stesso modo la (4) rispetto a u si ottiene invece:

$$\beta = f\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} + (\text{termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale})$$

Uguagliando e portando a secondo membro tutto quello che dipende solo dalla prima forma si ottiene che

$$e\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} - f\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} = \text{dipende solo dalla prima forma fondamentale}$$

Semplificando si ha:

$$e\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} - f\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} = -E\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK$$

In conclusione, ricavando K abbiamo finalmente che:

Proposizione 2.1. *La curvatura Gaussiana K può essere scritta mediante una formula che contiene solo i coefficienti della prima forma fondamentale e le loro derivate (prime e seconde).*

e quindi, nelle parole di Gauss:

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

L'espressione esatta può essere facilmente(!) trovata esplicitando tutti i calcoli precedenti. Una formula con un po' di raccoglimenti fatti è la seguente:

$$\begin{aligned} K = & -\frac{1}{4(EG - F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} \\ & - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left\{\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_u\right\} \end{aligned}$$

Come si vede è piuttosto complicata e non è utile nei calcoli. Questa formula si trova sul Postnikov. Trovate altre formule simili sull'Abate-Tovena (Teorema 4.6.11, pag. 203) e sul do Carmo (Capitolo 4-3, formula (5) a pag. 237): in entrambi i casi K è espresso in termini dei simboli di Christoffel e quindi le formule sono un po' più semplici. Un'altra formula comune (sostanzialmente la stessa data sopra) è la cosiddetta *formula di Brioschi*, che potete trovare su Wikipedia, all'indirizzo `https://it.wikipedia.org/wiki/Theorema_egregium` con una dimostrazione del Theorema Egregium basata su questa formula.