Geometria e fisica nell'Ottocento
Gauss, Riemann, Helmholtz

Claudio Bartocci

Il quinto postulato, il principe dei matematici e le «strida dei Beoti»

Il 14 ottobre 1806, nelle battaglie di Jena e di Auerstädt, le truppe prussiane sono sbaragliate dalle armate napoleoniche. Il comandante dell'esercito prussiano, Karl Wilhelm Ferdinand duca di Brunswick, è gravemente ferito e muore poco tempo dopo.

Quattrodici anni prima, nel 1792, lo stesso anno in cui ebbe a firmare il manifesto di Coblenza minacciosamente indirizzato ai Francesi rivoluzionari, il duca di Brunswick aveva preso sotto la propria protezione un ragazzo di umili origini, che ad appena quindici anni aveva già dato prova di possedere uno straordinario talento matematico: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Grazie al sostegno finanziario del duca, Gauss poté frequentare il Collegium Carolinum di Braunschweig (o Brunswick, nella forma antica del nome), sua città natale e capitale del ducato, e successivamente, dal 1795 al 1798, l'università di Gottinga. Qui ebbe tra i suoi insegnanti Abraham Gotthelf Kästner, studioso di multiforme erudizione ma «completamente sprovvisto [di ingegno] nelle questioni propriamente matematiche» (sono parole, ingenerose, dello stesso Gauss), il quale aveva raccolto una vasta biblioteca, ricca di testi in sui fondamenti della geometria e, in particolare, sulla «teoria delle parallele».

A fondamento dei tredici libri degli *Elementi* Euclide (attivo attorno al 300 a.C.) aveva posto 23 definizioni, 5 nozioni comuni (koinaì énnoiai) e 5 postulati (aitémata), dai quali riusciva a ricavare, attraverso catene di sillogismi e costruzioni geometriche elementari, tutte le conoscenze geometriche della sua epoca. Tra i postulati si distacca, non foss'altro che per l'elaborata sintassi del suo enunciato, il quinto, secondo il quale

> se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Questo fatto geometrico, sebbene non difficile da esemplificare mediante un disegno elementare, appare di evidenza meno lampante degli altri postulati: per circa due millenni – dall'antichità ai tempi fino, appunto ai tempi di Gauss – quasi non si contano gli innumerevoli tentativi di dedurlo dai rimanenti quattro postulati e dalle nozioni comuni o da altre assunzioni più o meno implicite. Già Proclo (412 – 485) nel suo *Commento al I libro di Euclide* si diceva convinto che il quinto postulato «deve essere assolutamente espunto dalla serie degli altri postulati, poiché si tratta di un teorema irto di difficoltà, alla cui soluzione Tolomeo ha dedicato un libro». Lo stesso Proclo forniva una riformulazione del postulato in termini della nozione di parallelismo (fondata, nella sua concezione, sulla nozione di distanza):

> dati una retta e un punto fuori di essa, esiste una e una sola retta passante per quel punto e parallela alla retta data

e ne azzardava una dimostrazione (fallace) basata su un ragionamento sviluppato da Aristotele nel *De Cælo*. Nei secoli successivi fu la civiltà islamica a raccogliere l'eredità del sapere geometrico greco, traducendo i testi fondamentali e aprendo nuove direttrici di ricerche; in particolare, la *quæstio* sul quinto postulato si arricchì di numerose idee originali, che non mancheranno di influenzare – quando saranno riscoperte – i matematici occidentali dal Rinascimento fino a tutto il Settecento. È una storia complessa – solo di recente ricostruita in maniera soddisfacente dagli storici della scienza –, che è legata a doppio filo a quella non meno intricata delle traduzioni arabe degli Elementi e della quale ci acconteremo di ricordare soltanto i nomi dei protagonisti principali: al-Gawhari, contemporaneo del grande al-Khuwarizmi, Tabit ibn-Qurra (che fu probabilmente il primo a introdurre il cosiddetto «quadrilatero birettangolo isoscele»), Ibn-al-Haytam (conosciuto nel Medioevo e nel Rinascimento con il nome di Alhazen), il persiano Omar Khayyam, più noto come poeta che come matematico e astronomo, e soprattutto lo sciita duodecimano Nasir ad-din at-Tusi, che approfondisce con sottigliezza e originalità le argomentazioni di Tabit ibn-Qurra. Nonostante che la traduzione in latino della versione araba degli *Elementi* per opera di Gherardo di Cremona risalga al XII secolo, fu solo nel Rinascimento, con la riscoperta del *Commento* di Proclo, che si riaccese l'interesse per il problema delle parallele. Tentativi di dimostrare il quinto postulato furono fatti dal gesuita Cristoforo Clavio e da Federico Commandino; Pietro Antonio Cataldi, matematico bolognese, pubblicò l'*Operetta delle linee equidistanti et non equidistanti* (1603) e Giovanni Alfonso Borrelli l'*Euclides restitutus* (1658). Nel 1663 'inglese John Wallis, ispirandosi esplicitamente ad idee di Nasir ad-din at-Tusi, riuscì a derivare il postulato delle parallele dall'ipotesi che, dato un triangolo, è sempre possibile costruirne un altro della stessa forma (simile) ma con i lati di lunghezza arbitrariamente grande. Nell'opera *Euclides ab omni nævo vindicatus* (1733) – una pietra miliare nella storia che stiamo brevemente ricapitolando – il padre gesuita Giovanni Girolamo Saccheri tentò di dimostrare il quinto postulato ragionando sul «quadrilatero birettangolo isoscele», quella figura, cioè, che si ottiene alzando due perpendicolari di uguale lunghezza dagli estremi di un segmento dato e unendo i loro estremi con un segmento. Se si assume il quinto postulato, la figura è un rettangolo, ma – si domandava Saccheri – è possibile dimostrare che è un rettangolo indipendentemente da questo postulato mediante una *reductio ad absurdum* rigorosamente basata soltanto sugli altri quattro postulati? Nel dipanare il filo della sua laboriosa argomentazione, peraltro non scevra da errori, Saccheri ottenne (suo malgrado, si dovrebbe aggiungere) i primi teoremi di quelle geometrie non euclidee che saranno sviluppate da János Bolyai e Nikolaj Ivanovič Lobačevskij un secolo più tardi.

L'importanza dell'opera di Saccheri non passò inosservata ai tra i contemporanei; in particolare, il suo tentativo di dimostrazione del quinto postulato fu analizzato, insieme a quelli precedenti più significativi, nella dissertazione *Conatuum præcipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* discussa a Gottinga nel 1763 da un allievo di Kästner, Georg Klügel. Questo scritto attrasse l'attenzione di una delle personalità più versatili della scena culturale e scientifica tedesca della seconda metà del Settecento: Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Fisico, astronomo, matematico, filosofo (importante la sua corrispondenza con Kant), Lambert, nella *Theorie der parallellinien* (1776; pubblicata postuma nel 1786) non solo riuscì a ricavare *ex novo*, con sicurezza ed eleganza, molti dei teoremi di Saccheri ma approdò a risultati nuovi, elaborando idee di un'originalità quasi temeraria. Ad esempio, partendo dalla negazione della validità del postulato delle parallele e supponendo che la somma $\alpha+\beta+\gamma$ degli angoli interni di un triangolo sia minore di π (una delle sole due ipotesi possibili, data la premessa), Lambert riuscì a dimostrare che l'area del triangolo è uguale a $r^2(\pi - (\alpha+\beta+\gamma)]$, essendo r una costante che non dipende dalla lunghezza dei lati del triangolo. «Da ciò – annotava – dovrei quasi concludere che [l'ipotesi assunta] si presenti nel caso di una sfera immaginaria» (cioè, di raggio immaginario). Con queste scarne parole Lambert anticipava di circa mezzo secolo le scoperte di Bolyai e Lobačevskij.

È attestato che a Gottinga, nel 1795, Gauss prese due volte in prestito dalla biblioteca dell'università il libro di Lambert sulla teoria delle parallele. Ciò confermava un interesse che risaliva già ad alcuni anni addietro, forse addirittura al 1792. I suoi progressi furono indubbiamente rapidi, tanto che, nel 1799, all'amico e compagno di studi Farkas Bolyai (padre di János), che gli scriveva di aver ottenuto una dimostrazione del quinto postulato, così rispondeva:

> [...] il cammino che ho scelto di seguire non mi conduce affatto alla meta vhe cerchiamo, e che tu mi assicuri di aver raggiunto, ma sembra piuttosto obbligarmi a dubitare della verità della stessa geometria. È vero che sono giunto a qualche cosa che la maggior parte delle persone riterrebbe costituire una dimostrazione, ma che ai miei occhi non prova un bel nulla.

Non sarebbe tuttavia corretto balzare alla conclusione che Gauss, non ancora ventenne, si fosse convinto che potessero esistere – non solo logicamente, ma anche a livello, se non ontologico, almeno empirico – geometrie diverse da quella euclidea. Certo, le ricerche dei matematici islamici, i risultati di Wallis, Saccheri e soprattutto Lambert avevano mostrato che negare del postulato delle parallele significa invalidare molte proprietà geometriche, che ci sembrano intuitivamente incontrovertibili, come la relazione di similitudine tra triangoli o il fatto che non esistano unità di lunghezza assolute. Ma questi risultati non mettevano in alcun modo in discussione il ruolo privilegiato della geometria codificata negli *Elementi* nella descrizione (o meglio, nella possibilità stessa di conoscenza) del mondo fisico. Infatti, come osserva Kant nella prima edizione della *Critica della ragion pura*, «lo spazio non è un concetto empirico»:

> la rappresentazione dello spazio non può esser nata per esperienza da rapporti del fenomeno esterno, ma l'esperienza esterna è essa stessa possibile, prima di tutto, per la detta rappresentazione. Lo spazio è una rappresentazione necessaria a priori, la quale sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne. Su questa necessità a priori si fonda la certezza apodittica di tutti i princpî geometrici e la possibilità delle loro costruzioni a priori.

Per Gauss, nel 1799, geometrie diverse da quella euclidea erano immaginabili soltanto come mere speculazioni logiche, null'altro che ipotesi *ab absurdo*.

Ma le idee di Gauss sarebbero cambiate negli anni successivi. Nel 1806, la morte del duca di Brunswick, suo benefattore, sul campo di battaglia di Jena lo obbligò a cercare una nuova sistemazione per sé e la propria famiglia. Oltre che per gli straordinari risultati che aveva ottenuto in teoria dei numeri (le monumentali *Disquitiones arithmeticæ* furono pubblicate a Lipsia nel 1801), il nome di Gauss aveva acquistato fama scientifica internazionale anche per il calcolo dell'orbita di Cerere (l'asteroide individuato da Giuseppe Piazzi nel 1801) e per la messa a punto di un nuovo, efficace metodo di determinazione dell'orbita dei corpi celesti. In considerazione di questi suoi importanti contributi all'astronomia, nel 1807 Gauss fu nominato direttore dell'Osservatorio di Gottinga: nell'università di questa stessa città, dove trascorrerà il resto della propria vita, diventerà professore di fisica nel 1831. I problemi astronomici condussero Gauss a perfezionare il metodo dei minimi quadrati (da lui ideato già nel 1802) e a compiere approfonditi studi di ottica geometrica; la geodesia e la cartografia lo assorbirono quasi completamente dal 1816 fino al 1825. Appare legittimo ipotizzare che queste ricerche centrate sulle applicazioni della matematica alla descrizione del mondo fisico contribuirono a far maturare in Gauss una concezione della geometria incompatibile con le idee kantiane. Nel 1817 così scrive a Olbers:

> Mi persuado sempre di più che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata, non, per lo meno, dall'intelletto umano o per l'intelletto umano. Può darsi che in una diversa vita noi si giunga, sulla natura dello spazio, ad idee diverse, le quali ci sono per ora inattingibili. Ma fino da allora è necessario porre la geometria non accanto all'aritmetica, la quale è puramente a priori, ma all'incirca sullo stesso piano della meccanica.

Nello stesso tempo, sul piano non filosofico ma strettamenmte matematico, i problemi connessi con i rilevamenti geodetici gli suggerirono nuove idee per affrontare da un punto di vista generale la questione dei fondamenti della geometria piana. Nel 1822 vinse il premio bandito dall'Accademia delle scienze di Copenaghen con una memoria dedicata al problema di determinare la condizione analitica che permette di trasformare due superfici l'una nell'altra in modo conforme (in modo, cioè, che siano conservate le ampiezze degli angoli, ma non necessariamente le lunghezze delle curve). Il punto culminante delle ricerche di Gauss in questa direzione è costituito dalla memoria *Disquisitiones generales circa superficies curvas* del 1827, che segna la nascita della geometria differenziale in senso moderno. Nelle *Disquisitiones* sono studiate le proprietà geometriche intrinseche di una superficie – in altre parole, le proprietà indipendenti dallo spazio ambiente in cui la superficie è immersa – e si sviluppano procedimenti per mettere in relazione la descrizione locale della superficie con le sue caratteristiche globali. Il principale, e più innovativo, strumento teorico introdotto da Gauss per portare a compimento questo ambizioso programma è il

concetto di «misura di curvatura » (*mensura curvaturæ*, oggi detta curvatura gaussiana), che viene definita mediante un'applicazione dalla superficie stessa nella sfera unitaria («questo procedimento – spiega Gauss – è essenzialmente la stessa di quella usata in astronomia, dove tutte le direzione sono riferite a una sfera fittizia di raggio infinito»). Gauss dimostra che la curvatura è uguale, in ogni punto dato, al prodotto delle curvature principali e che è completamente determinata dalle 3 funzioni che caratterizzano la prima forma fondamentale (il quadrato dell'*elementum lineare*, il quale esprime la distanza tra due punti inifinitamente vicini). Da questo risultato segue, come facile corollario, il celebre *theorema egregium*: se due superfici si possono trasformare l'una nell'altra in modo che siano conservate le ampiezze degli angoli e le lunghezze delle curve, allora le rispettive curvature sono uguali. L'altro teorema fondamentale contenuto nelle *Disquisitiones* costituisce una generalizzazione sia dei risultati sui triangoli sferici noti da tempo ai cartografi sia della formula di Lambert per i triangoli con «difetto» angolare (cioè, i triangoli iperbolici): su una qualunque superficie, l'integrale della curvatura su un triangolo i cui lati sono archi di geodetica è uguale alla somma degli angoli interni del triangolo diminuita di pi greco.
Nel 1829, in una lettera a Friedrich Wilhelm Bessel, Gauss scriveva:

> In qualche ora libera sono talvolta a riflettere su un altro argomento che per me è già vecchio di quasi quarant'anni: intendo parlare dei primi fondamenti della geometria [...] Intanto lascerò passare molto tempo prima di decidermi ad elaborare per la pubblicazione le mie assai ampie ricerche sull'argomento, e forse ciò non avverrà mai durante la mia vita, perché temerei le strida dei Beoti qualora volessi esprimere compiutamente le mie idee.

In realtà, quel che ha già scritto nelle *Disquisitiones* è già più che abbastanza: la geometria non euclidea non è più una costruzione meramente ipotetica, ma diventa un capitolo di quella branca della matematica che prenderà il nome di geometria differenziale, strettamente legata all'analisi, alla topologia e (nel caso delle superfici) all'analisi complessa. Un filo ininterrotto di riflessioni, arricchite da spunti originali provenienti dalle intense ricerche in astronomia e geodesia, lega i primi risultati ottenuti da Gauss nel 1799 («in principiis geometriæ egregios progressus fecimus» leggiamo in una pagina del *Diario matematico* di quell'anno) ai mirabili teoremi delle *Disquisitiones*. La geometria (locale) di una superficie corrisponde a quella euclidea se la curvatura è nulla, a quella sferica se la curvatura è una costante positiva, a quella iperbolica se la curvatura è una costante negativa. Sembra davvero impensabile, anche se mancano i riscontri testuali, che Gauss non avesse tratto questa

conclusione, tanto è vero che quando, nel 1832, lesse lo scritto sulla «scienza della spazio assolutamente vera» di János Bolyai (pubblicato in appendice al *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos* del padre), scrisse a Farkas, che gli aveva inviato l'opera: «non posso lodare questo lavoro [...]: lodarlo sarebbe come lodare me stesso».
Come spiegare allora il timore delle «strida dei beoti»? Le *Disquisitiones* lascivano aperto un problema fondamentale: capire in che modo e in quale misura fosse possibile estendere i risultati ottenuti per le superfici al caso tridimensionale. Soltanto dopo aver sviluppato questa teoria più generale si sarebbe potuto affrontare la questione, davvero spinosa, della struttura geometrica dello spazio fisico. Non è dato sapere quali idee (*if any*) avesse elaborato Gauss a questo riguardo; fu Bernhard Riemann (1826-1866) a compiere il successivo passo fondamentale lungo la via aperta dalla *Disquisitiones*.

Ipotesi, fatti e gruppi di trasformazioni

Nelle sue lezioni sulla storia della matematica, pubblicate nel 1926, Felix Klein osservava:

> [Riemann, quando era studente a Gottinga,] non ebbe la possibilità di assistere a molte lezioni di Gauss, a quel tempo già settantenne, che d'altra parte ne teneva assai poche. Quel giovane studente timido non poteva certo entrare in contatto umano con Gauss; questi non insegnava volentieri, mostrava scarso interesse per i suoi studenti e soleva essere del tutto inavvicinabile. Ciò nonostante, dobbiamo definire Riemann un allievo di Gauss, in effetti l'unico vero studente di Gauss, quello che riuscì a cogliere le sue idee interiori (*innere ideen*)[...]

Forse nessuno degli scritti di Riemann mostra una così profonda consonanza con le concezioni di Gauss sulla geometria – nello stesso tempo superandole nel quadro di una visione più ampia – come la sua *Habilitationsvortrag* (lezione di abilitazione) per il conseguimento del titolo di *Privatdozent*, esposta nel 1854 davanti alla Facoltà di filosofia dell'Università di Gottinga, alla presenza di Gauss. *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (il testo sarà pubblicato, postumo, nel 1867) sviluppa, in poche pagine di estrema densità teorica, un programma di vasta portata, che abbraccia geometria, fisica e filosofia in una prospettiva unitaria. La compresenza di interessi così diversi non deve stupire: all'università di Gottinga, in quegli anni, la matematica intratteneva un dialogo serrato con le altre discipline scientifiche, *in primis* con la fisica (e questa tradizione si sarebbe mantenuta nei decenni avvenire, almeno fino a Hilbert). Nel 1855, alla morte di Gauss – le cui ricerche, si erano volte a problemi di meccanica, di geomagnetismo, di teoria del potenziale, con importanti applicazioni quali la realizzazione (in collaborazione con Wilhelm Weber) di un telegrafo elettromagnetico e di un magnetometro bifilare – quando si pose il problema di assegnare la cattedra rimasta vacante a un matematico, a un fisico o ad un astronomo, Weber si pronunciò decisamente a favore della prima soluzione. A suo avviso, infatti, la matematica era «della massima importanza e indispensabile non solo per la formazione dei matematici, ma anche degli astronomi e dei fisici» e, più in generale, questa disciplina forniva gli strumenti teorici per mettere in luce le «connessioni causali» che sono alla base di tutti i fenomeni naturali. Lo stesso Riemann, dopo aver frequentato a Berlino (1847-1849) le lezioni di matematici insigni quali Jacobi, Eisenstein, Steiner e soprattutto Dirichlet, una volta di ritorno a Gottinga aveva seguito i corsi di fisica sperimentale di Weber. Successore di Gauss fu Dirichlet; di Dirichlet, morto nel 1859, Riemann.

Nelle prime due parti della *Habilitationsvortrag*, traendo ispirazione dalle idee contentute nel «celebre trattato del Consigliere Aulico Gauss sulle superficie curve», Riemann delinea una teoria generale delle «varietà *n*-estese», spazi cioè i cui punti sono specificati da *n* coordinate locali (ad esempio, una superficie costituisce una varietà biestesa). Ogni varietà è «suscettibile di diverse relazioni metriche»; occorre dunque specificare un «elemento lineare» che permetta di calcolare la lunghezza delle curve. Se si richiede, com'è ragionevole, che la lunghezza sia indipendente dalle coordinate scelte per rappresentare i punti della varietà, è necessario – concludeva Riemann – che il quadrato dell'elemento lineare (ciò che in termini moderni si chiama prima forma fondamentale) sia una funzione quadratica dei differenziali delle coordinate. La deviazione dalla planarità (*Ebenheit*) di una varietà *n*-estesa è espressa dalla misura di curvatura, che generalizza la nozione introdotta da Gauss nel caso delle superficie ed è determinata dall'assegnazione, in ogni punto, di $n(n-1)/2$ «direzioni di superficie». L'ultima parte della lezione affronta, con straordinaria originalità, il problema dello spazio fisico a partire dalla premessa che esso «costituisce soltanto un caso particolare di grandezza triestesa». Da ciò «consegue necessariamente che i teoremi della geometria non si possono derivare da concetti generali di grandezza, ma che quelle proprietà, grazie alle quali lo spazio si distingue da altre grandezze triestese pensabili, possono essere tratte soltanto dall'esperienza». Con queste poche parole Riemann inaugurava una nuova concezione del legame tra geometria e fisica, destinata a divenire l'assunto di base di tutte quelle teorie – dalla relatività generale di Einstein all'attuale teoria delle stringhe – che troveranno nei metodi topologici e geometrici la chiave per esplorare i segreti dell'universo. Ma l'audacia intellettuale di Riemann si spingeva oltre. Che cosa si può dire «quando si estendono [le] determinazioni empiriche al di là dei limiti dell'osservazione, nell'incommensurabilmente grande e nell'incommensurabilmente piccolo»? Nel primo caso,

> bisogna distinguere l'illimitato dall'infinito [...]. Che lo spazio sia una varietà tridimensionale triestesa, è un presupposto che trova applicazione in ogni concezione mondo esterno [...]. L'illimitatezza dello spazio possiede dunque una certezza empirica maggiore di qualsiasi esperienza esterna. Da qui non consegue affatto però l'infinitezza [...].

Supponendo, infatti, che via indipendenza dei corpi dal luogo, allora la curvatura deve essere costante: di conseguenza, «lo spazio sarebbe necessariamente finito, non appena questa misura di curvatura avesse sia pure il più piccolo valore positivo». Nel secondo caso, il più problematico e il più interessante perché alla base della «conoscenza della connessione causale [dei fenomeni]»,

> [...] sembra che i concetti empirici sui quali si fondano le determinazioni metriche spaziali, il concetto di corpo e di raggio luminoso, cessino di avere validità nell'infinitamente piccolo; è dunque certamente pensabile che nell'infinitamente piccolo le relazioni metriche dello spazio non si accordino con i postulati della geometria; ammissione questa che si renderebbe di fatto necessaria, se permettesse di spiegare in modo più semplice i fenomeni.

Queste considerazioni di Riemann, quasi profetiche se pensiamo allo sviluppo della fisica nel XX secolo, si devono legare alle riflessioni sui fondamenti della fisica che andava elaborando in quegli stessi anni, e in particolare a quella «ricerca sulla connessione tra elettricità, galvanismo, luce e gravità» alla quale accennava in una lettera del 1853 indirizzata al fratello Wilhelm. Rieman morì prematuramente nel 1866 prima di riuscire a dare forma compiuta alle sue intuizioni, che possiamo perciò ricostruire soltanto in via ipotetica. In un abbozzo intitolato *Naturphilosophie* (pubblicato postumo nel 1876, ma risalente al periodo 1853-54), che risentiva dell'influenza delle concezioni filosofiche di Herbart, Riemann tentò di spiegare i fenomeni gravitazionali e «luminosi» in termini della deformazione di un etere – un «fluido incomprimibile, omogeneo e senza gravità» – che riempierebbe lo spazio compreso tra gli «atomi ponderabili». In questa idea di Riemann (che sarà ripresa dal matematico inglese William Kingdon Clifford nell'opera *Il senso comune nelle scienze esatte*) sembra possibile ravvisare un'anticipazione di quel nesso tra curvatura ed energia, che troverà espressione chiara e fondata soltanto nella teoria della relatività generale di Einstein.

Hermann Helmholtz (Potsdam 1821-Berlino 1984) si era laureato in medecina nel 1842 discutendo una tesi sperimentale sulla struttura anatomica delle fibre nervose di alcuni inverterbrati. Negli anni successivi, pur prestando servizio come medico militare, Helmholtz trovò il tempo di sviluppare importanti ricerche sulla fisiologia della contazione muscolare nella rana («questo antichissimo martire della scienza») e di elaborare innovative riflessioni sui principi della fisica e della chimica. È del 1847 la memoria l'articolo *Sulla conservazione della forza*, nella quale, muovendo da assunzioni metodologiche e gnoseologiche in aperto contrasto con quelli della *Naturphilosophie* e facendo uso di un appropriato formalismo matematico, Helmholtz enuncia il principio di conservazione dell'energia, trattando sia il caso sia dei fenomeni meccanici, sia del calore, sia dei fenomeni elettrici e magnetici. La memoria del 1847 rappresenta una pietra miliare non solo per la storia della fisica – inaugura, infatti, quella «tesi energetica» che sarà ampliamente sviluppata e discussa nella seconda metà dell'Ottocento – ma anche per la storia della fisiologia, perché pone a fondamento di questa disciplina le stesse leggi empiriche e quantitative che governano tutti i fenomeni naturali. Al suo autore, nonostante la giovane età, si aprirono quasi immediatamente le porte dell'accademia: nel 1848 Helmholtz, dispensato dagli obblighi militari, e ottenne l'incarico di insegnante di anatomia all'Accademia di Belle arti di Berllino; l'anno seguente fu chiamato alla cattedra di fisiologia e anatomia dell'università Königsberg; successivamente divenne professore a Bonn (1855), a Heidelberg (1858) e infine a Berlino (1870). I numerosi e originali lavori di Helmholtz nel campo della fisiologia – sia sperimentali (basti citare la misurazione della velocità di propagazione dell'impulso nervoso e l'invenzione dell'oftalmoscopio), sia teorici (fondamentale q questo riguardo è l'articolo *Sugli integrali delle equazioni idrodinamiche, che corrispondono ai moti vorticosi*, del 1858) – confluirono in due grandiose opere di sintesi: il *Manuale di ottica fisiologica* (1856-1867) e *La scienza della percezione dei toni come fondamento fisiologico della teoria della musica* (1863-1877), che ancor oggi stupiscono per l'acutezza delle osservazioni, la profondità della trattazione matematica, la vastità dell'erudizione. Le «ricerche sulle intuizioni spaziali nel campo visivo» – ci informa lo stesso Helmholtz – «[gli diedero] occasione di eseguire anche sul problema dell'origine e dell'essenza delle nostre intuizioni dello spazio generalmente intese». Più in particolare, il problema che principalmente lo interessava era stabilire «in quale misura le proposizioni geometriche [abbiano] un senso oggettivamente valido». Nel

1866, all'oscuro della *Habilitationsvortrag* di Riemann, Helmholtz dedicò all'argomento un primo, breve scritto (*Sui fondamenti fattuali (thatsächlichen) della geometria*), che fu ampliato e completato due anni più tardi nella memoria *Sui fatti (Thatsachen), che stanno a fondamento della geometria*: soltanto pochi mesi prima della pubblicazione l'autore ebbe modo di leggere il testo di Riemann e modificò di conseguenza, se non la sostanza, la presentazione dei suoi risultati. Benché Helmholtz, nell'introduzione alla sua memoria, non mancasse di dichiarare di aver «percorso, nella sostanza, la stessa strada [di] Riemann», il suo modo di impostare la questione era radicalmente diverso. In effetti, anziché assumere come punto di partenza l'«ipotesi» avanzata da Riemann che «il quadrato dell'elemento lineare è una funzione omogenea di secondo grado dei differenziali delle coordinate», Helmholtz deduceva questa proprietà da un «fatto» che riflette la nostra esperienza del mondo reale: l'esistenza di corpi rigidi si possono muovere liberamente nello spazio senza cambiare forma o dimensione. Per chiarire questa idea, opportuno riprendere la metafora sviluppata da Helmholtz nella conferenza *Sull'origine e sul significato degli assiomi geometrici*, tenuta nel 1870 all'Unione dei docenti di Heidelberg:

> Immaginiamo – ciò che non è logicamente impossibile – che esistano esseri dotati di ragione, bidimensionali, viventi e moventesi sulla superificie d'uno dei nostri corpi solidi. Ammettiamo che essi non possano percepire alcunché fuori di questa superficie, ma che possano percepire in modo simile al nostro entro l'ambito della superficie su cui si muovono. Se tali esseri costruissero la loro geometria, attribuerebbero naturalmente al loro spazio due sole dimensioni

In questo mondo bidimensionale (da cui, probabilmente, dodici anni più tardi, trarrà ispirazione il reverendo Edwin Abbott Abbott per il suo *Flatlandia*) «la possibilità di spostare figure [...] senza modificazioni delle linee e degli angoli» è una proprietà intrinseca – nel senso di Gauss –, legata alle curvatura. Movimenti rigidi dipendenti da tre parametri indipendenti – concludeva Helmholtz – sono infatti possibili soltanto nel caso che la superficie abbia curvatura costante e, cioè, sia il piano euclideo, una sfera con l'usuale struttura metrica (non un uovo), o la pseudosfera descritta «dall'insegne matematico italiano Eugenio Beltrami». Conviene anche far presente che in questa stessa conferenza, rivolta a un pubblico colto di non matematici, Helmholtz metteva in chiara luce le conseguenza filosofiche di questa concezione della geometria, legata a doppio filo alle nuove acquisizione sulla fisiologia della percezione. Si rendeva infatti necessario, rivedere profondamente la gnoseologia kantiana, dato che la percezione dello spazio è acquisita e gli assiomi della geometria non hanno carattere trascendentale: la loro validità costituisce un fatto empirico, mentre il vero a priori è dato dall'idea di corpo rigido.

In realtà, il ragionamento di Helmholtz basato sui «movimenti liberi» dei corpi rigidi (un'idea già presente *in nuce* nella lezione di Riemann), per quanto fosse ingegnoso e originale, non era completamente rigoroso dal punto di vista matematico, e ciò per una semplice ragione: il formalismo adeguato per esprimere il concetto di movimento libero dei corpi rigidi sarà sviluppato soltanto con la creazione la teoria dei gruppi continui di trasformazioni ad opera di Sophus Lie (1842-1899) e di Felix Klein (1849-1925).
Gli straordinari sviluppi della geometria proiettiva dopo il 1820 – grazie ai contributi di matematici quali Jean-Victor Poncelet, Ferdinand Möbius, Julius Plücker, James Joseph Sylvester e soprattutto Arthur Cayley – avevano messo in risalto la centralità del concetto di «trasformazione». Cayley, in particolare, aveva elaborato un punto di vista molto generale, che lo portava che anche le proprietà metriche della geometria euclidea (misura delle lunghezze e degli angoli) potevano essere caratterizzate nel linguaggio della geometria proiettiva: secondo le parole dello stesso Cayley, nella *Sixth Memoir upon quantics* (1859), «la geometria metrica è parte della geometria proiettiva». D'altra parte, a partire dal 1866, con la traduzione in francese dei lavori di Lobačevskij, seguita da quella dell'*Appendix* di Bolyai e della *Habilitationsvortrag* di Riemann, la questione delle geometrie non euclidee tornò a essere aspramente dibattuta in seno alla comunità matematica. Eugenio Beltrami (1835-1900) nel celebre *Saggio di interpretazione della geometrai non euclidea* (1868) mostrò che la geometria di Lobačevskij-Bolyai si poteva rappresentare come la geometria di una particolare superficie a curvatura costante negativa, la pseudosfera (precedentemente descritta e studiata da Ferdinand Minding). Tutte queste linee di ricerca confluirono nell'opera profondamente innovatrice di Felix Klein.
Sviluppando i risultati di Cayley, Klein riuscì a dimostrare nel 1871 che anche le geometrie non euclidee (che classificava in iperboliche, ellittiche e paraboliche) potevano essere ottenute come casi particolari della geometria proiettiva. L'anno successivo, nel «programma pubblicato in occasione dell'accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'Università di Erlangen», esponeva i «metodi e i punti di vista [...] svolti in lavori recenti di Lie e [suoi]» nel quadro di una nuova concezione della geometria. Secondo Klein «il problema generale che comprende in sé, non solo la geometria ordinaria, ma anche e in particolare i nuovi metodi

geometrici che dobbiamo qui nominare, e le diverse maniere di trattazione delle varietà comunque estese» è il seguente:

> È data una varietà e in questa un gruppo di trsformazioni. Si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo.

La grande originalità di Klein – ha osservato Jean Dieudonné – sta nell'«aver concepito la relazione tra una "geometria" e il suo gruppo rovesciando i ruoli delle due entità, per cui un gruppo è l'oggetto primordiale e i diversi spazi sui quali esso opera mettono in evidenza diversi aspetti della struttura del gruppo». Secondo questa impostazione, le argomentazioni di Helmholtz rapppresentano il tentativo di ricostruire la struttura metrica del nostro spazio a partire dal gruppo delle sue isometrie: questo problema, posto più in generale su varietà di dimensione qualunque, troverà soluzione soltanto grazie alla teoria dei gruppi continui di trasformazione sviluppata da Lie.

D'altra parte, nella visione di Klein, la questione dei fondamenti sui quali si appoggia l'assioma delle parallele – se lo si debba considerare «come dato in via assoluta» o «solo come verificato approssimatamente dall'esperienza» – rappresentava un problema esclusivamente filosofico:

> il matematico come tale non s'interessa alla questione così posta, e desidera che le sue ricerche siano considerate indipendenti da ciò che dall'una o dall'altra parte si potrà rispondere alla questione medesima.

Per quanto riguarda quest'ultima affermazione, tuttavia, i successivi sviluppi della geometria e della fisica e dello reciproche interrelazioni – da Poincaré a Einstein – dovranno smentire nel modo più netto le parole di Klein.