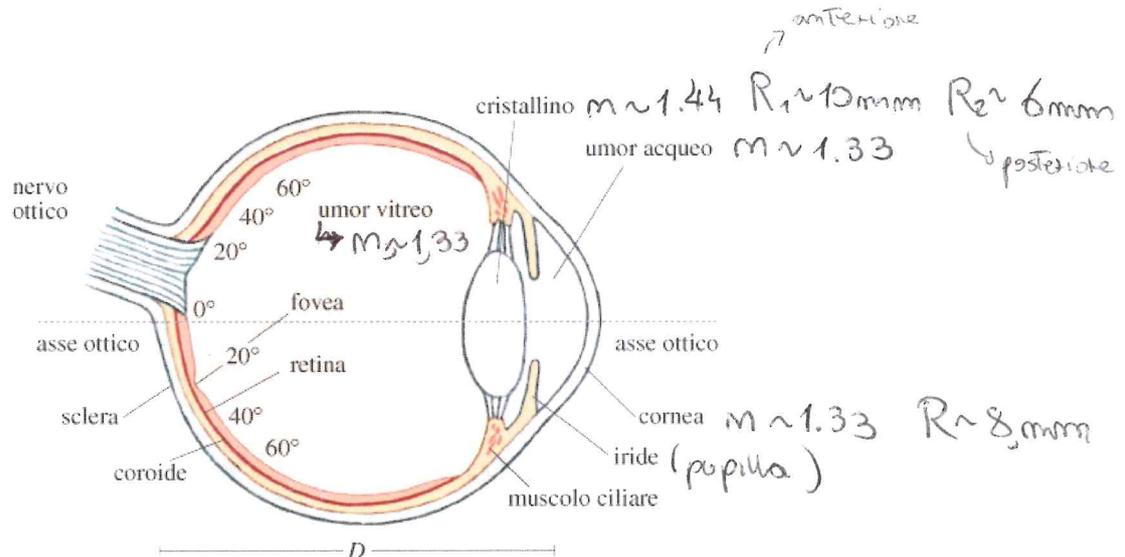


## L'occhio umano come sistema ottico:

Nella Figura è schematicamente rappresentata la sezione orizzontale di un occhio umano sinistro. Un raggio luminoso, proveniente dall'esterno, giunge sulla parte sensoriale dell'occhio (retina), attraversando i seguenti mezzi:

a) la cornea, di indice di rifrazione  $n \approx 1.33$ , con un raggio di curvatura di 8 mm;



b) l'umor acqueo, liquido contenuto fra la cornea e il cristallino, costituito da acqua e piccole quantità di proteine e sali in concentrazione isotonica, di indice di rifrazione  $n \approx 1.33$ ;

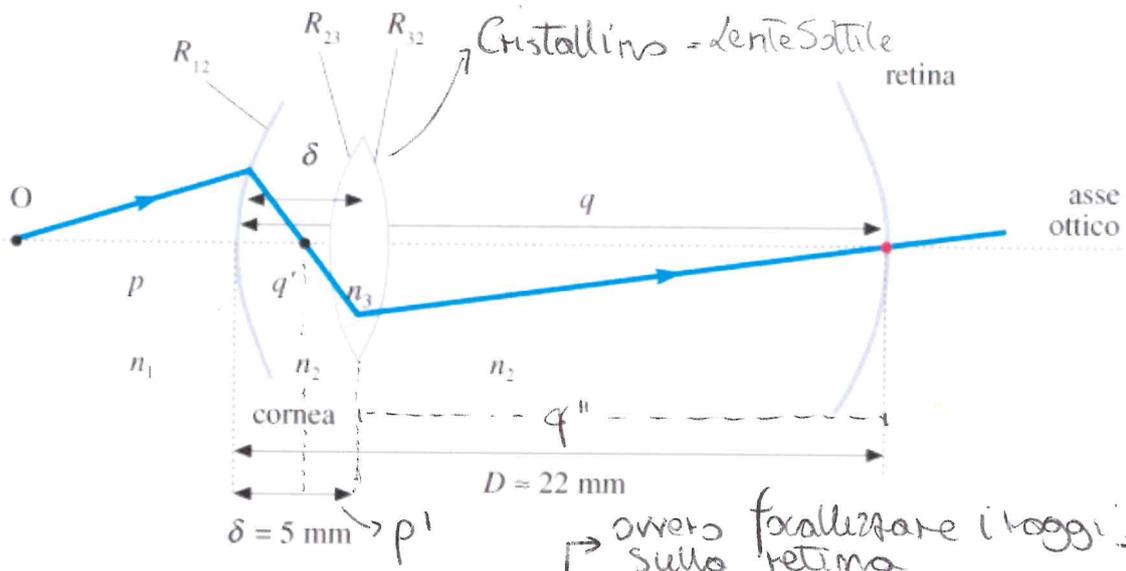
c) l'iride, costituita da una membrana elastica, al centro della quale si trova un'apertura (pupilla), la quale si contrae o si dilata a seconda dell'intensità luminosa che colpisce l'occhio, fungendo quindi da diaframma per i raggi luminosi;

d) il cristallino (o lente), lente biconvessa con due superfici con raggi di curvatura differenti (in stato di riposo, 10 mm per quella anteriore e 6 mm per quella posteriore), di indice di rifrazione medio  $n \approx 1.44$ ; la curvatura della superficie anteriore può essere diminuita dalla contrazione dei muscoli ciliari, variando così la distanza focale del cristallino;

e) l'umor vitreo (o corpo vitreo), materiale gelatinoso tra il cristallino e la retina, di indice di rifrazione uguale a quello dell'umor acqueo,  $n \approx 1.33$ ;

f) la retina, tessuto nervoso fotosensibile, su cui si formano le immagini e la cui funzione è quella di trasformare l'immagine in un insieme di potenziali d'azione che, tramite il nervo ottico, vengono inviati al cervello.

L'occhio umano può essere schematizzato come un diottro contenente una lente sottile. Il diottro è costituito dal sistema aria-umor acqueo, in quanto cornea, umor acqueo e umor vitreo, avendo circa lo stesso indice di rifrazione, possono essere considerati come un unico mezzo. La lente sottile, invece, rappresenta il cristallino. Per ottenere la relazione tra la distanza  $p$  dell'oggetto dall'occhio e la distanza  $q$  dalla cornea alla quale si forma l'immagine, bisogna applicare la formula dei punti coniugati del diottro e della lente sottile in successione. \* L'immagine sulla retina risulta essere reale e capovolta.



La minima distanza cui l'occhio può mettere a fuoco è chiamata punto prossimo, a circa 25 cm e, con sforzo, questa può arrivare a 10-5 cm. L'invecchiamento produce una diminuzione dell'elasticità del cristallino, nonché della capacità operativa del muscolo ciliato, per cui il potere di accomodamento diminuisce con l'età e il punto prossimo si allontana sempre più.

Quando l'occhio è focalizzato sul punto remoto, esso è rilassato e il sistema cornea-cristallino ha una distanza focale  $f$  pari a circa 25 mm. Quando l'occhio fissa il punto prossimo, il cristallino varia i suoi raggi di curvatura in modo da ridurre la distanza focale di circa 2.5 mm. Tale processo di accomodamento è compiuto dal muscolo ciliare, attaccato al cristallino, il quale contraendosi modifica la forma del cristallino stesso facendolo rigonfiare al centro.

È interessante osservare che la cornea esplica un potere di rifrazione predominante rispetto al cristallino. Una riprova di ciò si ha dal notevole sfocamento con cui appaiono gli oggetti quando si aprono gli occhi sott'acqua. In questo caso, la cornea si trova a separare due mezzi, l'acqua e l'umor acqueo, di indice di rifrazione quasi uguale: viene a mancare così l'azione della cornea e l'unico sistema rifrangente è costituito dal cristallino. Con l'uso di occhiali o di maschere da sub, la cornea viene mantenuta a contatto con l'aria, per cui il diottro corneale è ripristinato e gli oggetti sott'acqua sono visibili distintamente.

diotro occhio

presbiopia

$$\times \frac{m_1}{p} + \frac{m_2}{q'} = \frac{m_2 - m_1}{R_{12}} \quad \text{Diotro}$$

$$\frac{m_2}{p'} + \frac{m_2}{q''} = (m_3 - m_2) \left( \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{32}} \right) \quad \text{Lente}$$

$3 - q' \quad q'' - d$

→ per oggetti molto lontani:

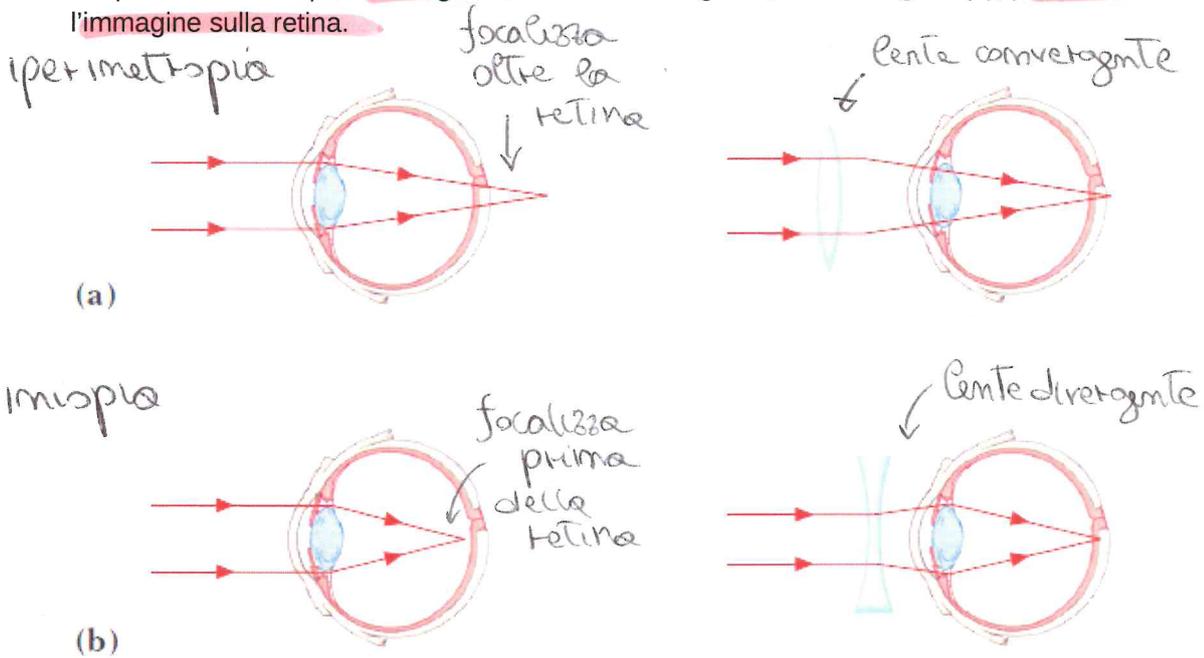
$$p = \infty; \text{ muscoli a riposo } R_{23} \sim 10 \text{ mm} \Rightarrow q \approx 22 \text{ mm} = \text{Diametro Occhio}$$

per punto prossimo

$$p \approx 25 \text{ cm} \quad R_{23} \sim 6,8 \text{ mm} \Rightarrow \text{raggio cristallino diminuito per far convergere i raggi a } q \approx D$$

Quando l'occhio rilassato produce un'immagine di un oggetto oltre la retina, si parla di ipermetropia: l'occhio ipermetrope ha bisogno di una lente convergente, come in figura (a), per focalizzare l'immagine sulla retina.

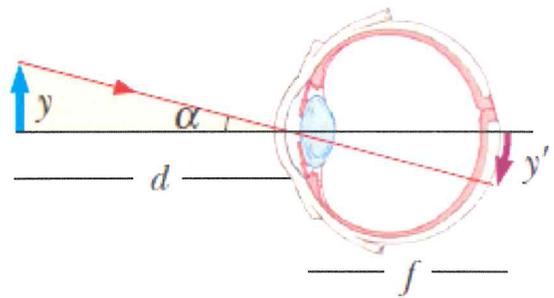
Quando l'occhio rilassato focalizza l'immagine di un oggetto prima della retina, si parla di miopia: l'occhio miope ha bisogno di una lente divergente, come in figura (b), per focalizzare l'immagine sulla retina.



Un altro possibile difetto dell'occhio è l'astigmatismo (da non confondere con l'aberrazione che porta questo nome), dovuto al fatto che la cornea non è esattamente sferica per cui, ad esempio, è più convergente nel piano orizzontale che nel piano verticale; la correzione avviene per mezzo di lenti cilindriche.

### → GRANDEZZA IMMAGINE

La grandezza apparente di un oggetto è determinata dalla grandezza dell'immagine sulla retina. Più grande è l'immagine, maggiore è il numero di coni e bastoncelli stimolati e maggiore è quindi l'informazione trasferita tramite il nervo ottico al cervello. Pertanto, per un dato oggetto di altezza  $y$  la migliore visione si ha in vicinanza del punto prossimo, ossia con l'oggetto alla distanza  $d = 25$  cm per l'occhio emmetrope ( $\tan \alpha = y/d = y/25$ ). Gli strumenti costruiti con lo scopo di permettere all'occhio di cogliere particolari degli oggetti che altrimenti non gli sarebbe possibile vedere consentono in sostanza un angolo di osservazione  $\beta > \alpha$  maggiore.



Ciò è massimo

e' l'angolo sotto cui e' visto



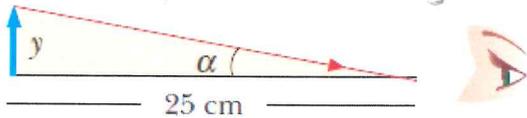
Se lo mettessi più vicino aumenterebbe  $\alpha$ , ma l'immagine non sarebbe più a fuoco.

## ♠ lente Ingrandimento

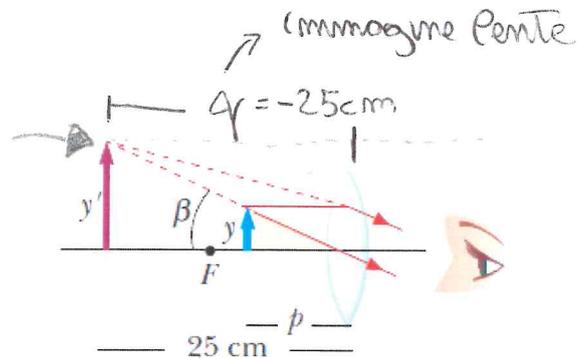
Lo strumento più semplice che opera in condizioni di ingrandimento visuale è la lente d'ingrandimento. Si tratta di una lente convergente con focale  $f$  minore della distanza del punto prossimo  $d = 25 \text{ cm}$ . L'ingrandimento visuale massimo con una visione nitida si ha quando, la distanza  $p$  dell'oggetto dall'occhio è tale che l'immagine (virtuale) osservata dall'occhio si formi a distanza  $q = -25 \text{ cm}$  ovvero sul punto prossimo:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-25} = \frac{1}{f} \quad , \quad p = \frac{25f}{25+f}$$

↳ posizione immagine virtuale



$$(a) \quad \text{tg } \alpha = \frac{y}{25}$$



$$(b) \quad \text{tg } \beta = \frac{y'}{p}$$

l'ingrandimento visuale massimo risulta:

$$V_{\text{max}} = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \frac{25}{p} = 1 + \frac{25}{f}$$

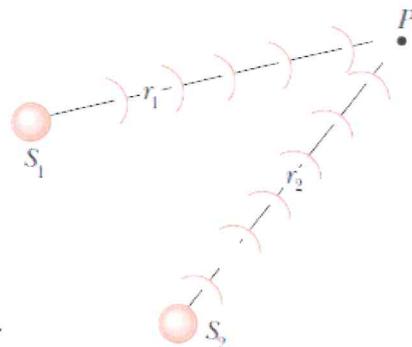
Affinché l'immagine formata dalla lente di ingrandimento si formi all'infinito, ovvero i raggi giungano all'occhio parallelamente in modo che esso osservi in modo rilassato, è conveniente che l'oggetto sia posto a distanza  $p \approx f$  per cui l'ingrandimento visuale risulta:

$$V = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \frac{25}{f}$$

Con una lente d'ingrandimento si arriva a valori dell'ordine di  $3\times, 4\times$ .

## Fenomeni di interferenza:

Il fenomeno di interferenza, dipende dal principio di sovrapposizione – basta sulla linearità dell'equazione di d'Alembert –, il quale afferma che quando due o più onde che viaggiano si combinano in un dato punto, l'ampiezza dell'onda in quel punto è la somma delle ampiezze delle singole onde. Assumendo che le onde siano armoniche e che abbiano la stessa frequenza, vedremo che le caratteristiche della sovrapposizione dipendono dalla posizione rispetto alle sorgenti, dalla direzione di vibrazione delle onde e dalla differenza di fase delle stesse.



Per fissare le idee, nel caso in cui le onde scalari, indipendentemente dalla loro forma, piana, sferica, cilindrica, siano emesse da due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ , e che l'osservazione avvenga in un certo punto P, esse sono rappresentate in P da:

$$\xi_1 = A_1 \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1) \quad \xi_2 = A_2 \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2) ,$$

dove  $A_1$  e  $A_2$  sono le ampiezze delle onde rispettivamente a distanza  $r_1$  e  $r_2$  da  $S_1$  e  $S_2$ , il termine  $kr_1 - \omega t$  descrive la propagazione dell'onda verso il punto P e  $\phi_1$  è la fase a cui è emessa l'onda dalla sorgente  $S_1$ . La differenza di fase tra le due onde è:

$$\rightarrow \delta = (kr_1 - \omega t + \phi_1) - (kr_2 - \omega t + \phi_2) = \underbrace{k(r_2 - r_1)}_{\text{differenza percorso}} + \underbrace{(\phi_1 - \phi_2)}_{\text{differenza intrinseca}} ;$$

Differenza di Fase Tra le onde

essa contiene due contributi: una differenza di fase intrinseca ( $\phi_1 - \phi_2$ ) e una differenza di fase  $k(r_2 - r_1)$ , dovuta all'eventuale differenza nel percorso di ciascuna onda per andare in P, che può a sua volta dipendere anche dalla natura fisica dei mezzi attraversati. Quando la differenza di fase tra due onde in qualsiasi punto P è costante nel tempo,  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \text{costante}$ , le sorgenti delle due onde si dicono **coerenti**. In particolare se  $\Delta\phi = 0$  le due sorgenti si dicono **sincrone**. Quando invece questa circostanza non si verifica, ovvero si verifica per tempi molto brevi rispetto all'intervallo di tempo necessario all'osservazione, le sorgenti si dicono **incoerenti**.

Se costante le onde sono coerenti

Il termine interferenza è riferito propriamente a quei fenomeni di sovrapposizione ottenuti con onde emesse da due o più sorgenti coerenti. A seconda della differenza di fase che hanno due onde che si sovrappongono in punto, daranno luogo ad una interferenza costruttiva o distruttiva. La possibilità di produrre interferenza è una caratteristica generale delle grandezze che si propagano per onde; ne è conferma il fatto che l'interferenza si verifica con ogni tipo di onda e che la trattazione analitica è indipendente dalla natura delle onde in esame.

Passiamo a fare interferenza

Si noti che per due onde coerenti la differenza di fase  $\delta$  non dipende dal tempo, di conseguenza l'ampiezza e l'intensità dell'onda risultante hanno un valore costante nel tempo che dipende solo dalla distanza del punto P dalle sorgenti. L'interferenza cioè è un fenomeno stazionario, funzione della posizione del punto, ma non del tempo.

Fenomeno Stazionario

Dipende dal punto, ma non dal tempo

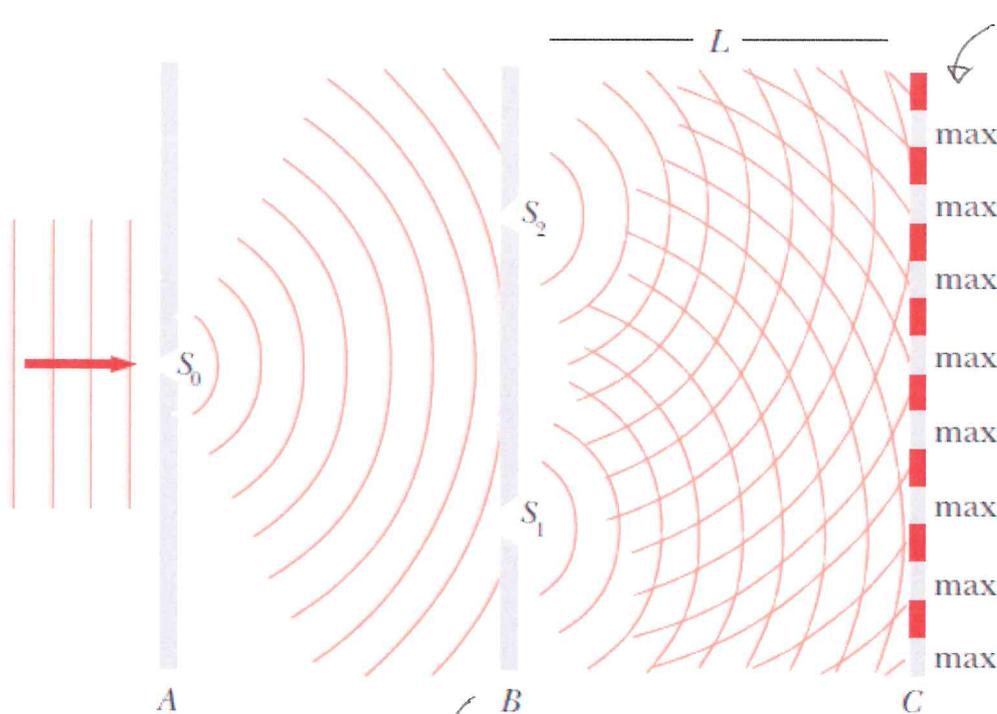
## Interferenza prodotta da due sorgenti: Esperimenti di Young

P. di H-F

Nell'esperimento sull'interferenza di Young (1801) la luce monocromatica viene diffratta dalla fenditura  $S_0$ , che si comporta così come una sorgente puntiforme di luce che emette fronti d'onda semicircolari. La luce incontra poi le fenditure  $S_1$  ed  $S_2$  sullo schermo B, che agiscono quindi come due sorgenti puntiformi di luce aventi la stessa pulsazione, e sincrone (ovvero le onde emergenti dalle due fenditure sono in fase tra loro; se le onde non fossero coerenti, ovvero la differenza di fase non fosse costante nel tempo, non potremmo osservare nessuna interferenza). La luce diffratta da queste due fenditure si sovrappone nella zona tra lo schermo B e lo schermo di osservazione C posto a distanza  $L$ , producendo una figura d'interferenza sullo schermo C, che consiste di una serie di bande parallele chiare e scure chiamate frange.

Quando la luce dalle fenditure  $S_1$  e  $S_2$  arriva su un punto dello schermo tale che in quella posizione si abbia interferenza costruttiva, appare una frangia chiara. Quando invece la luce proveniente dalle due fenditure si combina in modo da produrre un'interferenza distruttiva in una certa posizione sullo schermo, allora si ha una frangia scura.

La presenza di un'interferenza costruttiva o distruttiva in punto dello schermo è dovuta alla differenza di fase con cui le onde raggiungono lo schermo in quel punto; la differenza di fase a sua volta è dovuta alla diversa lunghezza percorsa dalle onde (inizialmente in fase) per raggiungere il punto (vedi figura).



Frange di interferenza dovute alla differenza di fase (dovuta al differente percorso) delle onde che raggiungono il punto

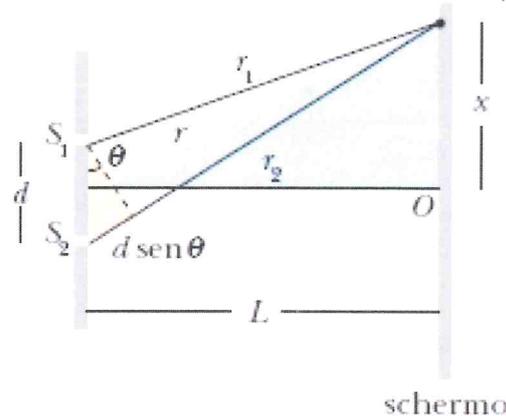
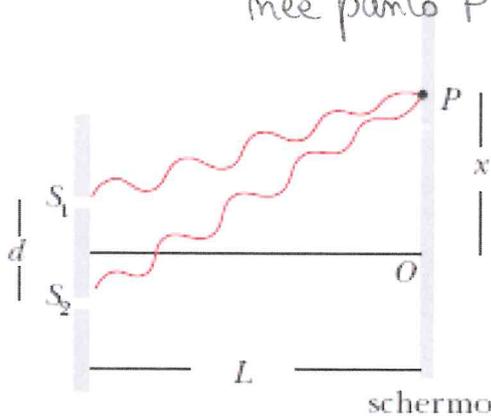
$S_1$  &  $S_2$  sorgenti p.tiformi di onde SINCRONE ( $\Delta\phi=0$ )

Per vedere come avviene la formazione delle frange chiare e scure e per determinare la loro posizione sullo schermo C, indichiamo con:

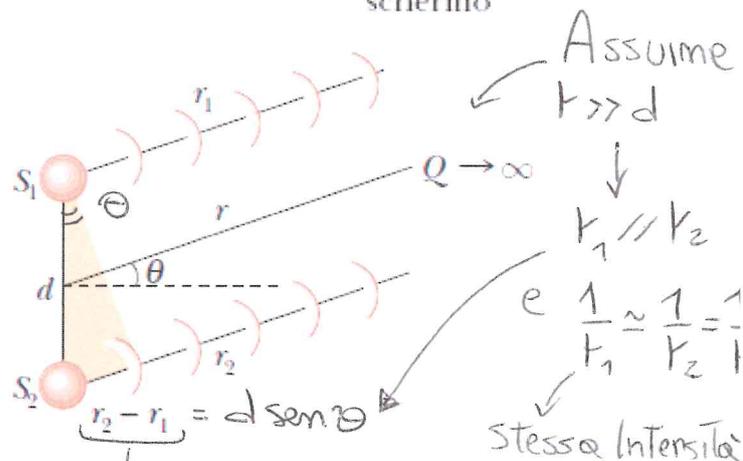
$$E_1 = \frac{E_0}{r_1} \sin(kr_1 - \omega t) \quad , \quad E_2 = \frac{E_0}{r_2} \sin(kr_2 - \omega t) \quad \leftarrow \text{Onde sferiche prodotte da sorgenti } S_1 \text{ e } S_2$$

l'effetto prodotto dalle singole sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  nel punto di sovrapposizione P in funzione del tempo. La differenza di fase tra le due onde è:

→  $\delta = k(r_2 - r_1)$ , Diff. di Fase Onde (dovuta a differenza percorso) nel punto P



Nell'ipotesi, verificata nell'esperimento di Young, che il punto P si trovi a distanza  $r$  dal punto medio tra  $S_1$  e  $S_2$  molto maggiore della separazione  $d$  tra  $S_1$  e  $S_2$  ( $r \gg d$ ), abbiamo che  $1/r_1 \approx 1/r_2 \approx 1/r$  (ovvero le intensità delle due onde sono uguali), e le due direzioni di propagazione si possono ritenere parallele per cui  $r_2 - r_1 = d \sin \theta$  e le relazioni precedenti diventano:

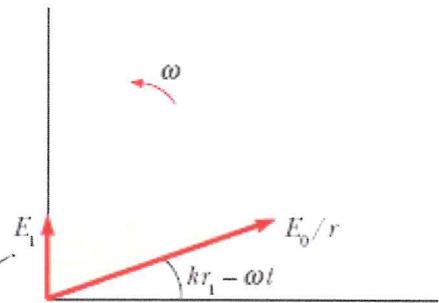


$$E_1 = \frac{E_0}{r} \sin(kr_1 - \omega t) \quad , \quad E_2 = \frac{E_0}{r} \sin(kr_2 - \omega t) \quad , \quad \delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

avendo utilizzato la definizione di numero d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ .

Per calcolare il campo elettrico risultante in P utilizziamo il metodo dei vettori rotanti o dei fasori.

e consideriamo l'onda armonica  $E = E_0/r \sin(kr - \omega t)$ , essa può essere rappresentata simbolicamente da un vettore, fasore, di modulo  $E_0/r$  che ruota intorno all'origine con velocità angolare  $\omega$ . La proiezione del fasore sull'asse verticale dà, istante per istante, il valore  $E_1(t)$ .



da proiezione sull'asse y da il valore del campo in P, istante per istante  $E_1 = \frac{E_0}{r} \sin(kr_1 - \omega t)$

Rappresentiamo ora le due onde che si sovrappongono in P come due fasori aventi lo stesso modulo  $E_0/r$ , formanti un angolo  $\delta$ , pari proprio alla differenza di fase. L'ampiezza del campo elettrico risultante in P, in base al teorema di Carnot, è:

$$E_{P,\delta} = \left[ \left( \frac{E_0}{r} \right)^2 + \left( \frac{E_0}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{E_0}{r} \right)^2 \cos \delta \right]^{1/2}$$

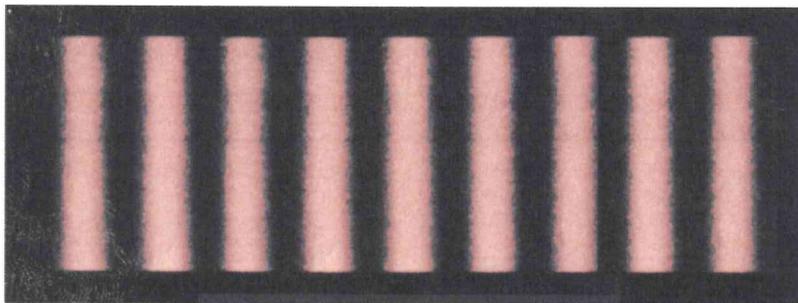
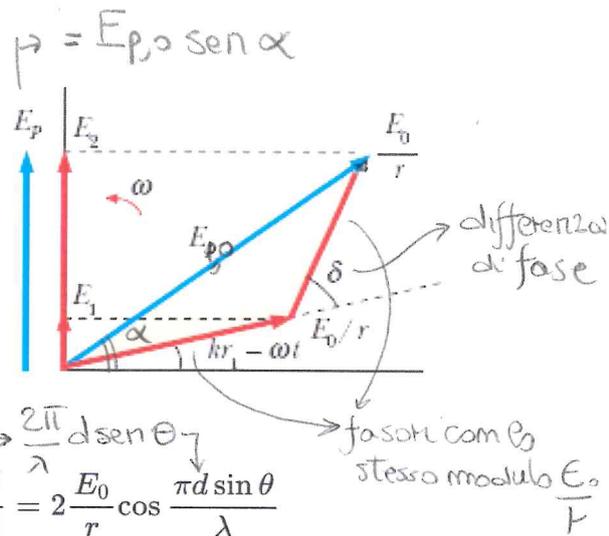
Ovvero:

$$E_{P,\delta} = \frac{E_0}{r} \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = \frac{E_0}{r} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\delta}{2}} = 2 \frac{E_0}{r} \cos \frac{\delta}{2} = 2 \frac{E_0}{r} \cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

Ricordando che l'intensità di un'onda è direttamente proporzionale al quadrato della sua ampiezza, l'intensità luminosa in P è data da:

$$I_P = 2I_1(1 + \cos \delta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad I_P(\theta) = 4I_1 \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right), \Rightarrow \text{L'intensità, moltiplicata di una media su molti periodi, è costante nel tempo}$$

in cui  $I_1 = I_2$  è l'intensità prodotta in P da ciascuna sorgente, quando agisce da sola.



In Figura è rappresentata la funzione  $I_P(\sin \theta)$  al variare del seno dell'angolo  $\theta$  di osservazione, con l'immagine che si osserva su uno schermo, quando l'esperimento è fatto con luce rossa.

In particolare si osserva un massimo dell'ampiezza  $2E_0/r$ , e quindi d'intensità  $I_P = 4I_1$ , nei punti P in cui è verificata la condizione:

$$\cos \frac{\delta}{2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \pm m\pi \Rightarrow \delta = \pm 2m\pi$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2m\pi, \quad d \sin \theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

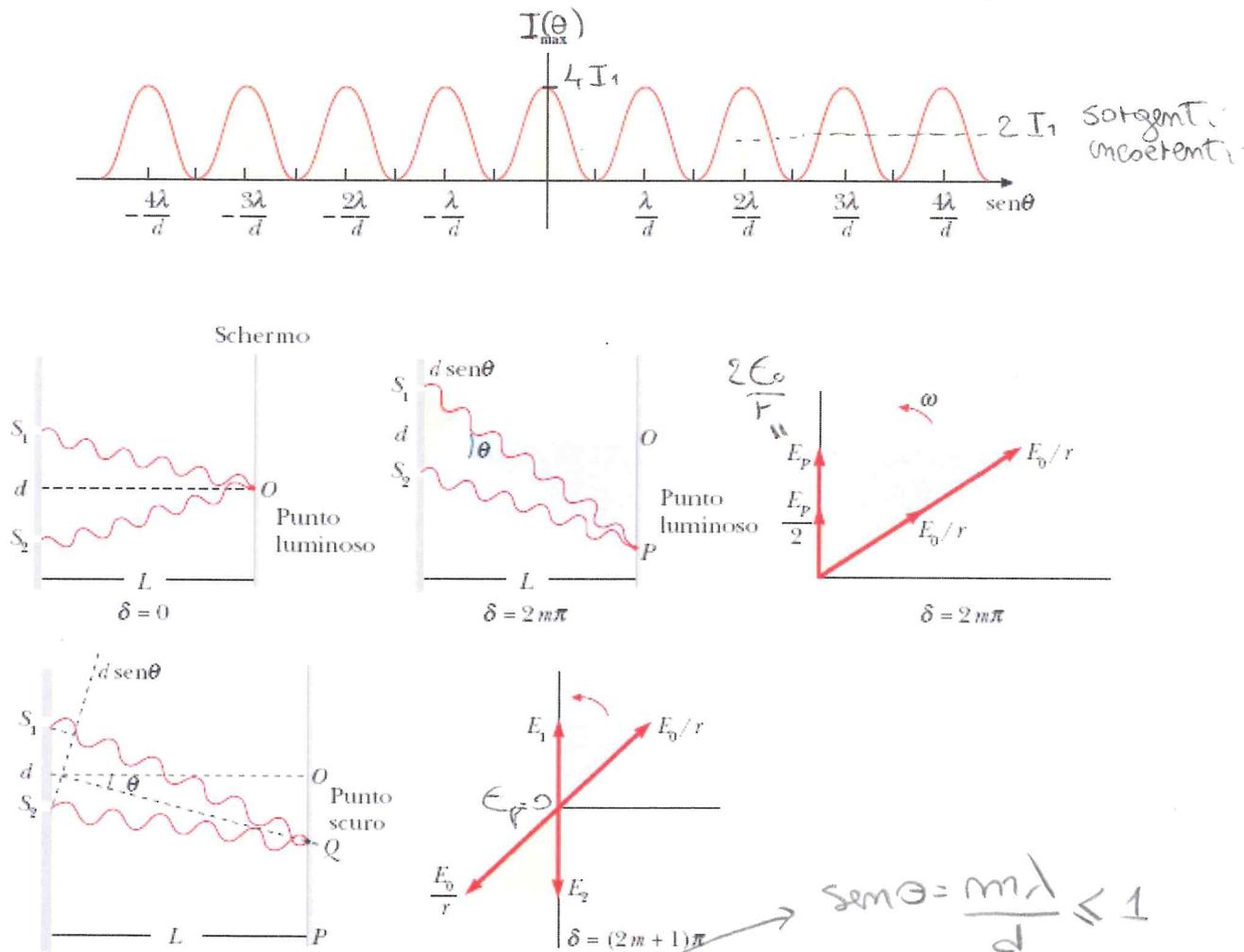
Ovvero se la differenza di cammino è zero oppure un multiplo intero di una lunghezza d'onda, le due onde arriveranno in fase in P e ne risulterà un'interferenza costruttiva.

Nei punti Q in cui si verifica la condizione:  $\cos \frac{\delta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{(2m+1)\pi}{2} \Rightarrow \delta = (2m+1)\pi$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = (2m+1)\pi, \quad d \sin \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vedi Figg  
seguenti

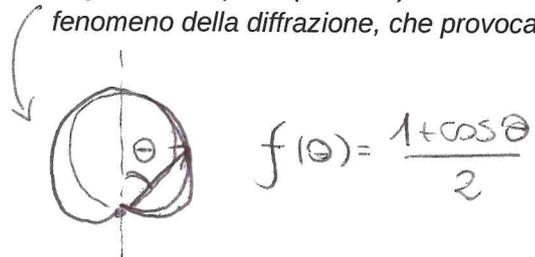
l'ampiezza  $E_p$  è nulla e quindi  $I_p = 0$ . La differenza di percorso è un multiplo semintero di  $\lambda$ , le due onde sono in opposizione di fase e quindi istante per istante si sommano elidendosi; l'interferenza si dice distruttiva.



I valori di  $m$  nelle relazioni precedenti non possono crescere indefinitamente: infatti deve essere soddisfatta la condizione  $\text{sen } \theta \leq 1$  ovvero  $\theta \leq \pi/2$ . Se la lunghezza d'onda è minore o eguale alla separazione tra le sorgenti,  $\lambda/d \leq 1$ ,  $m$  può assumere, oltre al valore zero che è sempre possibile, almeno un altro valore, ci sono cioè almeno due direzioni di massima intensità; se invece  $\lambda > d$  c'è solo il massimo a  $\theta = 0$  ( $m = 0$ ). Analogamente, se  $\lambda > 2d$  non c'è nessun minimo mentre se  $\lambda \leq 2d$  c'è almeno un minimo.

Alcune considerazioni:

La formula per l'intensità fornita sopra, assume che le due fenditure agiscano come sorgenti isotrope mentre nella realtà l'intensità emergente dalle due fenditure ha una dipendenza angolare del tipo  $\frac{1}{2}(1 + \cos \vartheta)$ . Inoltre la grandezza finita delle fenditure  $S_1$  e  $S_2$ , da luogo al fenomeno della diffrazione, che provoca una diminuzione ben più marcata dell'intensità



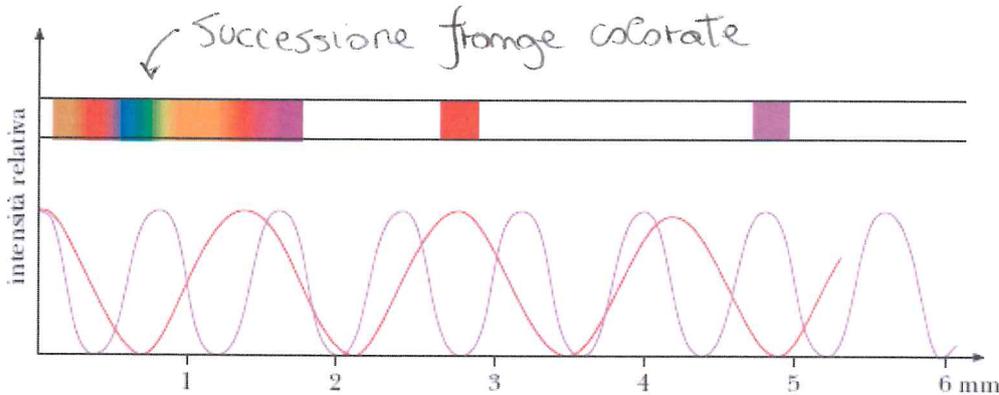
↓  
 • Se  $\lambda < d$   
 $m$  può essere  $\neq 0$  (più MAX)  
 • Se  $\lambda \geq d$   
 $m$  può essere solo  $= 0$  (1 solo MAX)

all'aumentare di  $\theta$ . Per tali motivi la figura di interferenza effettivamente osservata consiste in un numero limitato di frange nell'intorno dell'asse del sistema  $\theta = 0$ .

Dipendenza da  $\lambda$ :



Se la luce incidente non è monocromatica, le posizioni in cui le diverse lunghezze d'onda sono in fase o opposizione di fase saranno diverse. In particolare se ad incidere è una luce bianca sullo schermo in corrispondenza dell'asse del dispositivo si osserva una frangia bianca ai lati della quale c'è una successione di frange colorate.



Se sorgenti incoerenti

Se le due sorgenti sono incoerenti nella differenza di fase  $\delta$  che compare nella definizione di intensità occorre considerare anche la differenza di fase intrinseca  $\Delta\phi$  che compare in:

$$I_P = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I_1 \cos^2 \left[ \frac{k(r_2 - r_1) + \Delta\phi}{2} \right] \rightarrow \text{Varia casualmente nel tempo}$$

Dal momento che  $\Delta\phi$  varia casualmente nel tempo, anche  $\delta$  varia casualmente nel tempo, per cui il valore medio nel tempo di  $\cos^2 \delta/2$  è  $1/2$  e risulta:

$$I = 2I_1, \Rightarrow \text{Intensità indipendente da } \theta \Rightarrow \text{NO INTERFERENZA}$$

essa non dipende più da  $\delta$  e risulta in ogni punto eguale alla somma delle intensità prodotte indipendentemente dalle singole sorgenti: con le sorgenti incoerenti non c'è più interferenza.

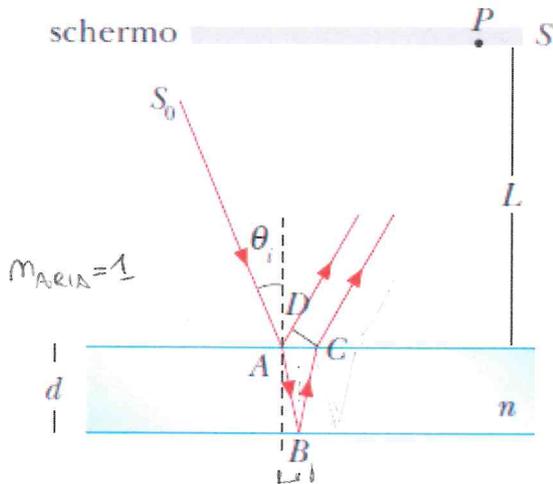
Dal confronto tra i diversi comportamenti con due sorgenti coerenti e incoerenti si conclude che:

la coerenza tra due sorgenti di potenza  $p$  opera una redistribuzione della potenza complessiva  $p_R = 2p$  emessa dalle due sorgenti, che viene concentrata in certe direzioni e rarefatta in altre, nel rispetto però della conservazione dell'energia.

In natura è possibile osservare diversi casi di interferenza di onde elettromagnetiche.

L'interferenza dovuta alla riflessione della luce del Sole sulle due superfici di una lamina sottile di una sostanza trasparente è forse il caso di interferenza più facilmente osservabile nella vita comune. Storicamente, la prima osservazione documentata di frange d'interferenza avvenne in questo modo ad opera di Boyle (1663) e, pochi anni dopo, di Newton.

Tali effetti si osservano comunemente sugli strati sottili di olio sull'acqua, sulle bolle di sapone, sulla pellicola d'acqua lasciata dalla pioggia sui vetri di una macchina.



Supponiamo di volere osservare gli effetti prodotti dalla riflessione della luce proveniente da una sorgente  $S_0$  su una lamina spessa  $d$ , formata da una sostanza trasparente di indice di rifrazione  $n$ , posta in aria, su uno schermo  $S$  posto ad una certa distanza  $L$  dalla lamina e ad essa parallelo. La luce che incide in  $A$  sulla superficie superiore della lamina con angolo d'incidenza  $\theta_i$  dà origine in  $A$  a un'onda riflessa e un'onda trasmessa che si propaga nella lamina nella direzione  $\theta_t$ , determinata dalla legge di Snell  $\text{sen}\theta_i = \text{sen}\theta_t/n$ ; nel punto  $B$  della superficie inferiore della lamina l'onda trasmessa dà origine a un'onda trasmessa e a

un'onda riflessa che riattraversa la lamina. Nel punto  $C$  della superficie superiore della lamina si ha la formazione di un'onda trasmessa in aria nella stessa direzione della prima onda riflessa e un'onda riflessa, da cui hanno origine, per riflessioni successive sulle due facce della lamina, altre onde. Ci si limita normalmente, come in figura, alle prime due onde, perché le onde successive hanno intensità molto piccola rispetto alle prime due. Le sorgenti virtuali originate dalla riflessione sulla prima e seconda superficie della lamina sono due sorgenti coerenti, in quanto prodotte dalla stessa sorgente, per cui esse potrebbero produrre sullo schermo  $S$  fenomeni d'interferenza analoghi a quelli osservati nell'esperimento di Young. In questo caso la differenza di fase tra le due sorgenti è:

$$\delta = 2dknc\cos\theta_t - \pi \quad \text{per riflessione} \quad (15.34)$$

da  $m_1 < m_2$  si inverte il  $\rho_{\text{campo}}$

dove il primo termine a secondo membro, con  $k = 2\pi/\lambda$ , è la differenza di fase dovuta alla differenza di percorso delle due onde  $\Delta r = (ABC - AD)$ , e  $\pi$  la differenza di fase prodotta solo alla riflessione in  $A$  (la riflessione da un mezzo  $n_1 < n_2$  inverte la direzione del campo, ovvero lo sfasa di  $\pi$ ).

Di natura simile sono le frange di interferenza che si possono osservare su un sottile strato e.g. di olio



$$\Delta\phi(t) = \cos T$$

**ESEMPIO: Trasmissione di un sistema di due antenne**

Un sistema di  $N = 2$  antenne, ciascuna di potenza  $p_1 = 100$  kW (isotropica), distanti  $d = 10$  m una dall'altra, emette onde elettromagnetiche sferiche sincrone di frequenza  $\nu = 3 \cdot 10^7$  Hz. Calcolare le figure d'interferenza prodotte dal sistema alla distanza  $L = 10$  km dal sistema stesso, nel piano delle antenne.

Soluzione: Alla distanza  $L = 10$  km l'intensità di ciascuna antenna è  $I_1 = p_1/4\pi L^2 = 7.96 \cdot 10^{-5}$

[W/m<sup>2</sup>], a cui corrisponde l'ampiezza del campo elettrico  $E_1 = \sqrt{2I_1/c\epsilon_0} = 0.245$  V/m e del campo magnetico  $B_1 = E_1/c = 8.17 \cdot 10^{-10}$  T.

$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$  Intensità di polo oscillante onda piana

La lunghezza d'onda è  $\lambda = c/\nu = 10$  m, uguale a  $d = \lambda$ . Si hanno massimi principali nelle direzioni:

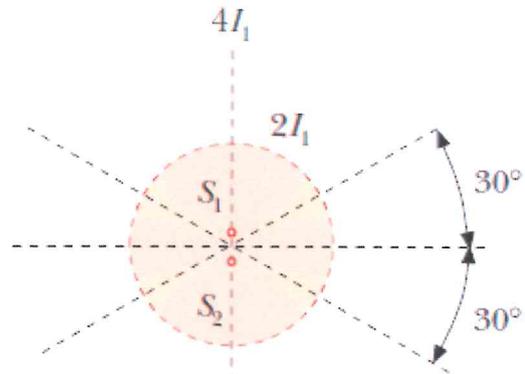
$\text{sen } \theta = m \rightarrow m = 0 \quad \theta = 0 \quad , \quad m = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

In queste direzioni:

$I_{\text{max}} = 4I_1 = 3.18 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$  ,

$E_{\text{max}} = 2E_1 = 0.49 \text{ V/m}$

$B_{\text{max}} = 2B_1 = 1.63 \cdot 10^{-9} \text{ T}$  ;



i minimi d'interferenza si hanno nelle direzioni:

$\text{sin } \theta = m' + 0.5 \Rightarrow m' = 0, \theta = 30^\circ$

L'espressione analitica della  $I(\theta)$  è dunque:

$I_R(\theta) = 4I_1 \cos^2(\pi \text{sen } \theta) = 4I_1 \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \text{sen } \theta\right)$

In figura è rappresentato il diagramma polare ottenuto riportando per ogni angolo  $\theta$  (formato con l'asse orizzontale dalla retta che unisce l'origine con il punto in cui si osserva il campo) un punto la cui distanza dal centro è direttamente proporzionale a  $I_R(\theta)$ .

La potenza complessiva emessa dal sistema, che si otterrebbe integrando la  $I_R(\theta)$  su tutto l'angolo solido, risulta  $p = 2p_1$ , perché l'interferenza agisce solamente sull'intensità variandone la sua forma ma non sulla potenza del sistema, la stessa sia che le sorgenti siano coerenti o incoerenti. Infatti se le sorgenti sono incoerenti l'intensità risulta costante in tutte le direzioni. In figura il diagramma polare nel caso di sorgenti incoerenti è rappresentato da una sfera di raggio  $2I_1$ : l'intensità è costante in tutte le direzioni.

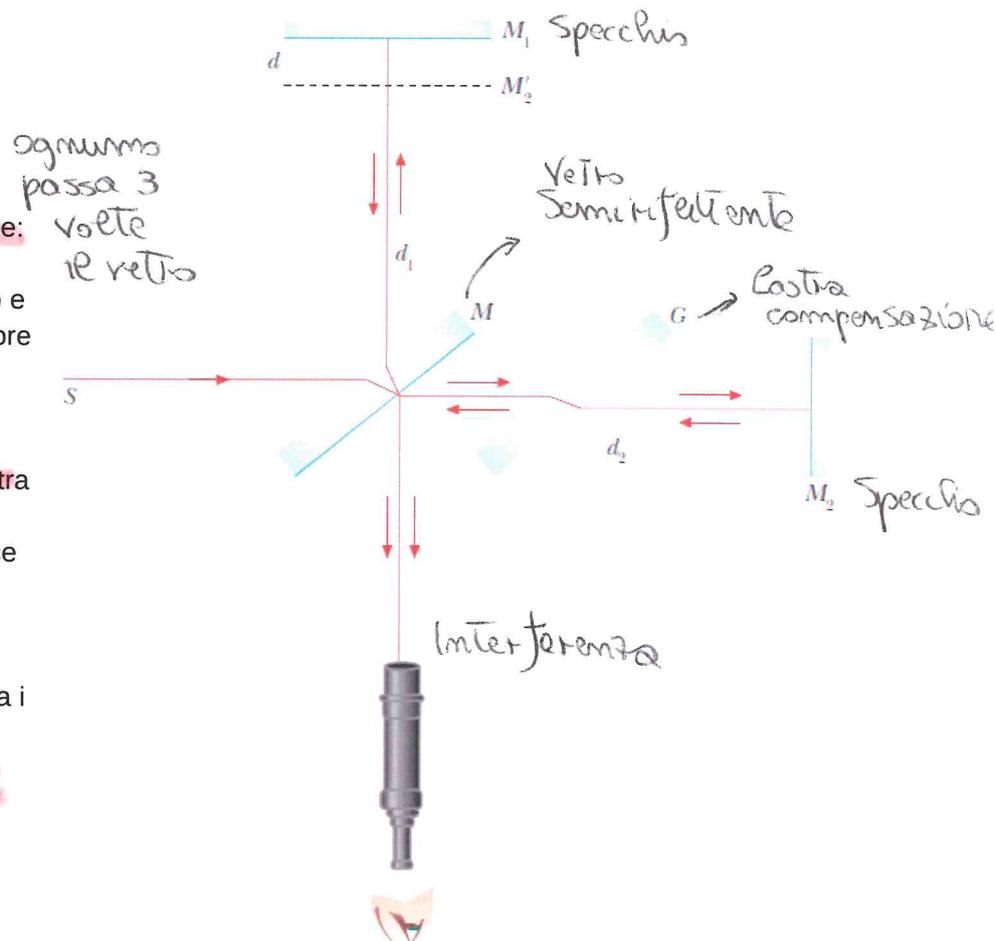
$\text{sen } \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{2d}$

$\frac{\lambda}{d} = 1 < 2$

## Interferometro di Michelson

Il fenomeno dell'interferenza ha moltissime applicazioni tecniche e scientifiche. Uno strumento in particolare, detto interferometro, sfrutta il fenomeno per effettuare misure molto precise di velocità, tempo o distanza (e.g. interferometri onde gravitazionali). Un famoso esempio è dato dal l'interferometro di Michelson; è costituito da due specchi  $M_2$  e  $M_1$ , il primo fisso e il secondo mobile, da una lastra di vetro  $M$  avente una faccia semiriflettente e da una seconda lastra di vetro  $G$ , dello stesso spessore di  $M$ . Un fascio di luce proveniente dalla sorgente estesa lontana  $S$  attraversa la lastra  $M$  e incide sulla faccia semiriflettente: una parte è riflessa verso lo specchio  $M_1$ , una parte eguale è trasmessa verso lo specchio  $M_2$ , che raggiunge passando attraverso la lastra  $G$ . I fasci riflessi dagli specchi tornano verso la faccia semiriflettente di  $M$ : quello proveniente da  $M_1$ , parzialmente trasmesso, e quello proveniente da  $M_2$ , parzialmente riflesso, arrivano attraverso un telescopio sulla retina dell'osservatore, dove interferiscono; essi sono coerenti in quanto ottenuti da un'unica sorgente per divisione di ampiezza.

La lastra  $G$ , detta lastra di compensazione, fa sì che entrambi i raggi che interferiscono attraversino lo stesso spessore di vetro, eliminando effetti di dispersione: infatti se non ci fosse  $G$  la differenza di fase tra un raggio e l'altro dovuta al diverso spessore di vetro attraversato dipenderebbe dalla lunghezza d'onda, perché l'indice di rifrazione dipende da  $\lambda$ . La lastra  $G$  è dunque necessaria se si illumina con luce bianca; in luce monocromatica non sarebbe indispensabile, però è utile mantenerla in quanto così la differenza di cammino ottico tra i raggi dipende, con qualsiasi illuminazione, soltanto da  $d_1 - d_2$ , eguale alla differenza tra i cosiddetti bracci dell'interferometro.

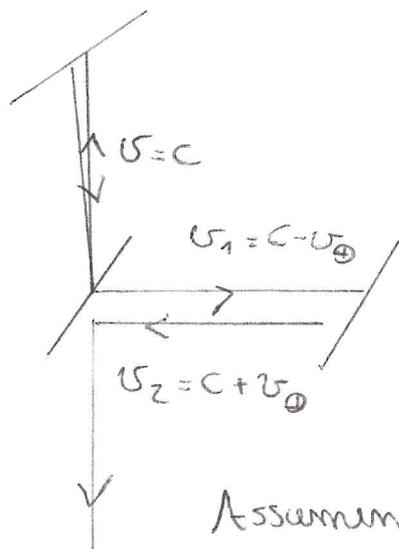


Se i due specchi sono esattamente perpendicolari tra loro, l'effetto osservato è equivalente a quello di una lamina d'aria di spessore  $d = d_1 - d_2$ : la luce proveniente da  $M_2$  gioca il ruolo di luce riflessa sulla superficie inferiore della lamina, quella proveniente da  $M_1$  di luce riflessa sulla faccia superiore

della lamina. Nella figura la lamina d'aria equivalente è quella sotto lo specchio M1 e la linea tratteggiata, bordo inferiore della lamina, è l'immagine di M2 data dallo specchio semiriflettente.

Anche se molto più elaborato nella pratica, fu questo il metodo seguito da Michelson per confrontare la lunghezza del metro campione con la lunghezza d'onda di una riga rossa emessa da atomi di cadmio ( $\lambda = 648.84722 \text{ nm}$ ); egli trovò che il metro era pari a  $1.5531635 \cdot 10^6$  di tali lunghezze d'onda, con un errore relativo stimato di  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ . In tal modo Michelson pose le basi per la definizione ottica dell'unità di lunghezza, adottata nel 1960.

Un risultato concettualmente fondamentale ottenuto con l'interferometro di Michelson fu la prova che la velocità della luce non dipende dal sistema di riferimento, esperimenti di Michelson e Morley, conclusi nel 1887. Supponiamo che il percorso MM2 sia parallelo alla velocità della Terra, e quindi il percorso MM1 ortogonale a questa velocità. Per una data lunghezza geometrica dei percorsi si calcola quale deve essere la figura di interferenza tenendo conto del fatto che la velocità  $c$  della luce dovrebbe comporsi con la velocità  $v$  della Terra risultando ad esempio  $v_1 = c - v$  nel tratto MM2 e  $v_2 = c + v$  nel tratto M2M: lo sfasamento tra le onde che interferiscono deve cioè essere determinato inserendo gli appropriati valori di velocità di propagazione  $v_1$  e  $v_2$  della luce in accordo con la composizione galileiana delle velocità, in entrambi i bracci. Una rotazione di  $90^\circ$  dell'interferometro, che giace in un piano orizzontale, scambia il ruolo dei due percorsi MM2 e MM1 e si dovrebbe osservare uno spostamento delle frange, essendo variato lo sfasamento tra le onde che interferiscono. Lo spostamento atteso era di circa mezza frangia, ma gli autori non riuscirono ad osservare nessuno spostamento. L'esperimento fu ripetuto nelle più diverse condizioni, sempre con lo stesso risultato, e portò alla conclusione, posta da Einstein come una delle basi della teoria della relatività ristretta, che la velocità della luce è la stessa in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi v}{v}$$

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \sum_0^{\infty} \cos(kx - \omega t) = \\ &= \sum_0^{\infty} \cos\left(\omega \left[\frac{x}{v} - t\right]\right) \end{aligned}$$

Assumendo bracci stessa lunghezza

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= k_1 r + k_2 r - 2kr \\ &= (k_1 + k_2 - 2k) r \\ &= \frac{\omega}{c - v} + \frac{\omega}{c + v} - 2\frac{\omega}{c} = \omega \left( \frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} - \frac{2}{c} \right) \end{aligned}$$

## \* Interferometri Onde Gravitazionali:

→ Anche le perturbazioni dello spazio Tempo si propagano come onde (che viaggiano a  $c$ !)

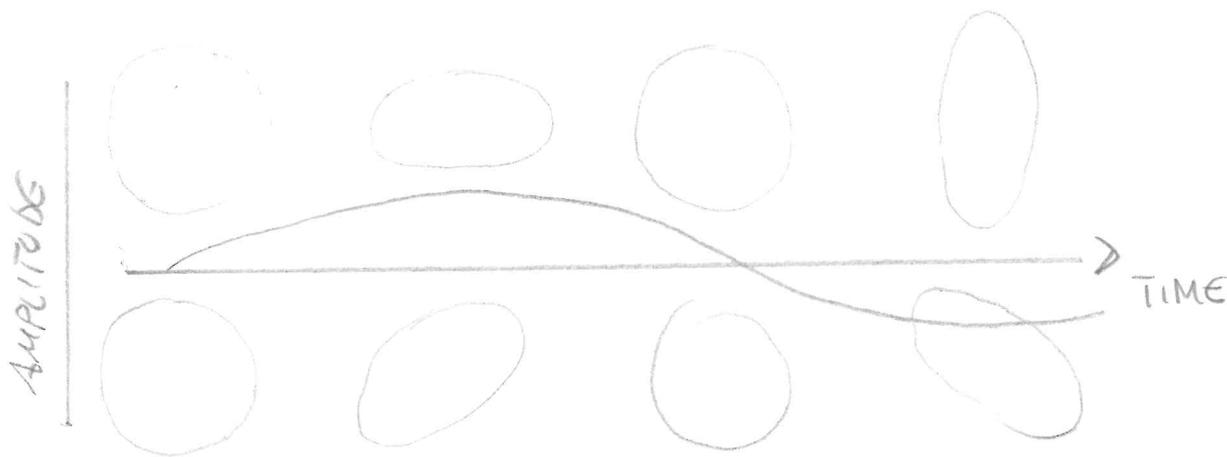
$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (c=1)$$



Tensori che descrive  
la metrica dello spaziotempo

Si deriva dall'eq.ne di Einstein della relatività Generale

→ 2 possibili polarizzazioni: + X

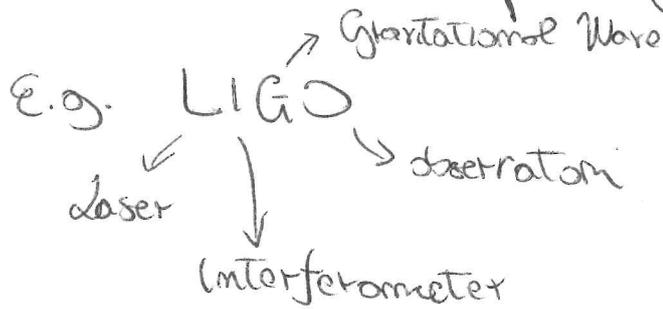


$$\Rightarrow h \approx \frac{\Delta l}{l} \sim 10^{-21}$$

↓  
Vedi eq.ne  
pagina dopo

⇒ ovvero la variazione di lunghezza relativa per il passaggio di un'onda gravitazionale "tipica" di un evento di coalescenza è dell'ordine di  $10^{-21}$ !

→ Questo implica che devo costruire interferometri con bracci molto lunghi per sperare di osservare il passaggio di un'onda G.



$$L \sim 4 \text{ km} \rightarrow \Delta L \sim 10^{-16} \text{ cm}$$

$$\frac{1}{1000} \text{ Raggio Atomico!}$$

→ Prima osservazione 14 Sept 2015 (BH-BH merger)\*

Amplitude Wave

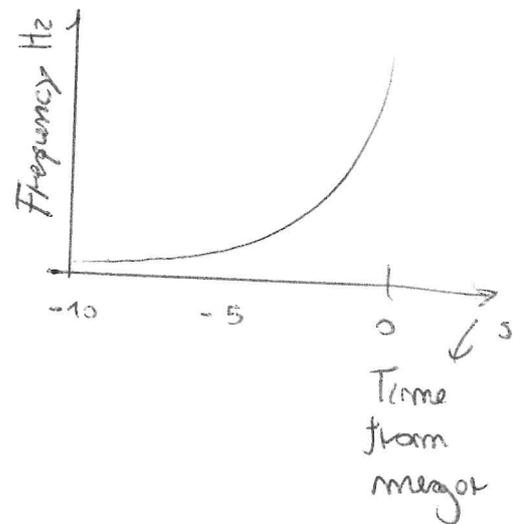
$$h \propto \frac{1}{D_L} \left( \frac{GM}{c^3} \right)^{5/3} \Omega^{2/3}$$

Chirp Mass

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}$$

Frequency sweep

$$\frac{d\Omega}{dt} \propto \left( \frac{G\mathcal{M}}{c^3} \right)^{5/3}$$



\* Osservazioni indirette del fenomeno si