



Il lemma precedente in matematica si legge:

"UN ENDOMORFISMO È UNA CLASSE DI SIMILARITÀ DI MATRICI"
e similmente avremo:

"UNA FORMA BILINEARE È UNA CLASSE DI CONGRUENZA DI MATRICI"

ANCORA NON SAPPIAMO
~~SE~~ COS'È: LO VEDREMO
NELL'UNITÀ 9

Oss: la domanda più importante **PERMANE**, non è risolta. E cioè:
Se parto da $A \in M_n(K)$ non diagonale, e voglio risolvere il
problema agli autovalori di A , ora so che A rappresenta
un certo $f \in \text{End}(V)$ (i.e. $A = M_B^B(f) \exists B$) e che se trovassimo
una base diversa $\mathcal{C}$ tale che $B := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ è **DIAGONALE**
o in parte risolvere il problema agli autovalori per B
è facilissimo e dall'altro $B \sim A$ cioè B è simile ad A
ed allora possiamo sperare che la soluzione del

problema agli autovalori di A sia lo stesso delle soluzioni al problema agli autovalori di B .

MA QUINDI, QUANDO ESISTE QUESTA BASE $\mathcal{C} : M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ DIAGONALE?

Def: Come al solito $\dim(V) = n$, $f \in \text{End}(V)$, $v \in V$.

i). f **DIAGONALIZZABILE** $\Leftrightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ DIAGONALE $\exists \mathcal{C}$ BASE di V
 $\downarrow \uparrow$ ESISTE UNA BASE $\mathcal{B} : A \in M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$
 BASE di V SE ESISTE si CHIAMA BASE di V CHE DIAGONALIZZA f

A **DIAGONALIZZABILE** $\Leftrightarrow A \sim B$, $\exists B$ DIAGONALE

ii) $0 \neq v$ **AUTOVETTORE** di f $\Leftrightarrow f(v) = \lambda v$ $\exists \lambda \in K$

 $0 \neq v$ **AUTOVETTORE** di A $\Leftrightarrow A \cdot v = \lambda v$ $\exists \lambda \in K$
 È LA STESSA COSA CHE DIRE CHE v È AUTOVETTORE DELL'ENDOMORFISMO LA .
 SE ESISTE si CHIAMA AUTOVALORE di f (oppure di A) RELATIVO ALL'AUTOVETTORE v .

Lo **SPETTRO** di f (di A) è definito come:

$Sp(f) = \{ \lambda \text{ autovalore di } f \}$ (e analogamente per una matrice A) -9-

iii). Il **POLINOMIO CARATTERISTICO** $P_f(t)$ di $f \in \text{End}(V)$ nella variabile t è definito come:

$$P_f(t) := \det(f - t \cdot \text{Id}_V) \in K[t]_{\dim(V)}$$

← SEGUE DALLA DEF DI DETERMINANTE

← PER $\det(f)$ SI INTENDE $\det(M_B^B(f)) \forall B$

Il **POLINOMIO CARATTERISTICO** $P_A(t)$ di $A \in M_n(K)$ nella variabile t è definito come:

$$P_A(t) := \det(A - t \cdot I_{\dim(V)}) \in K[t]_{\dim(V)}$$

iv). L' **AUTOSPAZIO** di f relativo all' autovalore λ è definito come

$$V_\lambda(f) := \ker(f - t \cdot \text{Id}_V)|_{t=\lambda} \subseteq V$$

$$\downarrow$$

$$= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

$\downarrow$
= il sottospazio vettoriale degli autovettori di $\lambda \in K$

← PERCHÉ OGNI NUCLEO DI OGNI APPLICAZIONE LINEARE È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

[e definire analogamente per una matrice A]

v). La **MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA** $m_a(\lambda, f) \in \mathbb{N}$ dell'autovalore λ di f è definita come

$$m_a(\lambda, f) := \max \left\{ m \in \mathbb{N} \mid P_f^{(m-1)}(t) \Big|_{t=\lambda} = 0 \right\}$$

DERIVATA $(m-1)$ -ESIMA
DEL
POLINOMIO
 $P_f(t)$ NELLA
VARIABILE t

La **MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA** $m_g(\lambda, f) \in \mathbb{N}$ dell'autovalore λ di f è definita come

$$m_g(\lambda, f) := \dim(\ker(f - \lambda \cdot \text{Id}_V))$$

↓
= dimensione dell'autospazio di f relativo all'autovalore λ .

Oss: Nota bene che per definire un autovalore può essere lo scalare nullo, mentre un autovettore non può essere il vettore nullo!

Oss.: come mai in def iii). abbiamo potuto scrivere
 $\det(f) := \det(M_B^B(f)) \quad \forall B$ base di V ? E se in basi diverse
 il determinante fosse diverso? Questo non accade
 perché IL DETERMINANTE È BEN DEFINITO SULLE
 CLASSI DI SIMILARITÀ di MATRICI oppure si dice che
 IL DETERMINANTE PASSA AL QUOZIENTE, MODULO
 LA RELAZIONE di SIMILARITÀ, che è in altro modo
 equivalente per dire che ESISTE UNA FUNZIONE

$$\det : \text{End}(V) \cong M_n(K) / \sim \longrightarrow K$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \uparrow \text{SIMILARITÀ} \\ f_A & \longleftrightarrow [A] & \longrightarrow \det(A) = \det(f) \end{array}$$

In altre parole:

$$A \sim B \implies \det(A) = \det(B)$$

LA COSA IMPORTANTE QUI
 È CHE $\det(A)$ NON DIPENDE
 DAL RAPPRESENTANTE DELLA
 CLASSE SCELTO!

Dim.: la dimostrazione segue dal Teorema di BINET:

$$\text{se } A \sim B \Rightarrow A = C^{-1} B C \quad \exists C \in GL_n(K) \Rightarrow$$

$$\det(A) = \det(C^{-1} B C) = \det(C^{-1}) \det(B) \det(C)$$

$$\downarrow$$
$$= \cancel{\det(C)^{-1}} \cdot \det(B) \cdot \cancel{\det(C)} = \det(B) \quad \checkmark$$

Oss.:

Dopo tutte queste definizioni, c'è una risposta?
Ovvero, data una $f \in \text{End}(V)$ oppure una $A \in M_n(K)$
si può o non si può sapere se f (oppure A)

SONO DIAGONALIZZABILI?

Ovvero si può o non si può sapere se $\exists B \in M_n(K)$
tale che $B \sim A$ e B sia diagonale, cioè
rappresenti l'endomorfismo f in un'altra base?

Se esiste, esiste una dimostrazione **Costruttiva**
(i.e. che ci dice come trovare B esplicitamente)?

I matematici ci hanno pensato **MOLTO A LUNGO**, e tutt'ora questo problema è così complicato che invece che un'unica elegantissima **RISPOSTA COMPLETA**, abbiamo un'introcata insieme di **CRITERI**, ognuno che provvede una **CONDIZIONE SUFFICIENTE** (talvolta anche **NECESSARIA**) sulle matrici o sugli endomorfismi affinché siano **DIAGONALIZZABILI**. Ma non esiste una **CLASSIFICAZIONE COMPLETA** che sia estremamente facile da utilizzare in pratica.

Vediamo i risultati di base sulle diagonalizzazione, ovvero quei **CRITERI** che garantiscono una **CONDIZIONE SUFFICIENTE** [e talvolta anche necessaria] affinché una matrice sia **DIAGONALIZZABILE**.

I criteri che vedremo sono raccolti nelle pagine seguenti:

$\dim(V) = n$ FINITA!

TEOREMA [1° CRITERIO di DIAGONALIZZAZIONE]

$$f \text{ DIAGONALIZZABILE} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_g(\lambda, f) = \dim(V)$$

SOMMIAMO SU TUTTO LO SPETTRO DI f , OVVERO SULL' INSIEME DI TUTTI I SUOI AUTOVALORI

TEOREMA [2° CRITERIO di DIAGONALIZZAZIONE]

$$\left. \begin{array}{l} \text{i). } m_g(\lambda, f) = m_a(\lambda, f) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(f) \\ \text{ii). } P_f(t) \in K[t]_{\dim(V)} \text{ SPEZZA IN FATTORI DI GRADO UNO} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f \text{ DIAGONALIZZABILE}$$

COR Se $|\text{Sp}(f)| = \dim(V) \Rightarrow f \text{ DIAGONALIZZABILE}$

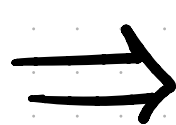
(OVVERO SE CI SONO $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim(V)}\}$ AUTOVALORI)

TEOREMA [TEOREMA SPETTRALE]

[UNITÀ 10]

$$A \in M_n(K = \mathbb{R})$$

A SIMMETRICA



A DIAGONALIZZABILE

(E QUINDI f_A DIAGONALIZZABILE)

E QUINDI LE MATRICI ASSOCIATE SONO DIAGONALIZZABILI

Relazioni di Equivalenza viste nel corso

RELAZ. DI EQUIVALENZA	RAPPRESENTANTI PREFERITI	INSIEME QUOZIENTE	QUANTITA' INVARIANTI ALL' INTERNO della stessa CLASSE di EQUIVALENZA
EQUIVALENZA MODULO n $a \sim b \Leftrightarrow n \mid a - b$ $a, b \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N}$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DELLA CLASSE DI EQUIVALENZA CHE SIA COMPRESO TRA 0 ED $n-1$	$\mathbb{Z}_n := \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$	Resto della divisione Euclidea modulo n
EQUIVALENZA GEOMETRICA TRA VETTORI $v \sim w \Leftrightarrow v$ può essere traslato su w mantenendolo parallelo $v, w \in K^n$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DELLA CLASSE DI EQUIV. CHE ABBA LA CODA DEL VETTORE SULL'ORIGINE	VETTORI GEOMETRICI	Verso Direzione Norma
EQUIVALENZA PER OPERAZIONI ELEMENT. TRA MATRICI o SISTEMI LINEARI $A \sim B \Leftrightarrow A$ può essere ottenuta da B tramite operaz. elementari $A, B \in M_{n \times m}(K)$	UNA DELLA INFINITE MATRICI A FORMA SCALA CHE RAPPRESENTI QUEL SISTEMA LINEARE	SISTEMI LINEARI	$\text{Ker} =$ il nucleo Im $\leftarrow$ L'IMMAGINE <u>NO</u> $\text{rank} =$ il rango
SIMILARITA' tra MATRICI $A \sim B \Leftrightarrow A = C^{-1}BC$ $A, B \in M_n(K) \quad \exists C \in GL_n(K)$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DIAGONALE DELLA CLASSE, SE ESISTE	$\text{End}(K^n)$	Ordine, autospazi Determinante Polin. caratteristico Autovettori, autovalori
CONGRUENZA tra MATRICI $A \sim B \Leftrightarrow A = {}^tCBC$ $A, B \in M_n(K) \quad \exists C \in GL_n(K)$	L'UNICO RAPPRESENTANTE DIAGONALE DELLA CLASSE, SE ESISTE	FORME BILINEARI SU K^n	Ordine Forma bilineare associata