Matrici Ortogonali & Teorema Spettrale

Def: (MATRICE ORTOGONALE) $A \in M_n(\mathbb{R})$ ORTOGONALE $\Leftrightarrow {}^tA = A^{-1}$ [i.e. ${}^tA\,A = I_n$]. Si scrive $A \in O(n)$. $(O_n(\mathbb{R}))$

Oss: ORTOGONALE $\Rightarrow$ INVERTIBILE
$\not\Leftarrow$

Oss: APPLICHIAMO BINET

$$\det({}^tA\,A) = \det(I_n) = 1$$
$$\overset{\text{BINET}}{=} \det({}^tA)\cdot\det(A)$$

Siccome sappiamo che $\det({}^tA) = \det(A)$, allora $\det(A)^2 = 1$

Allora $\det(A) = 1$ oppure $\det(A) = -1$

Esempi:

1. $\boxed{\det(A) = 1}$ $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Allora le matrici A di questa forma sono ortogonali

In effetti la loro applicazione lineare associata è una ROTAZIONE NEL PIANO di un angolo θ, preserva quindi le distanze

intorno all'origine

2. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

è ortogonale, però questa volta $\boxed{\det = -1}$

la sua applicazione lineare associata rappresenta una RIFLESSIONE DEL PIANO rispetto alla retta passante per l'origine e di inclinazione l'angolo $\theta/2$ rispetto ad e_1.

COR | $A \in O(n) \Leftrightarrow L_A$ è una ISOMETRIA di $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

corollario

PRODOTTO SCALARE STANDARD

cioè $\langle L_A(u), L_A(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

PROP (V,g) Euclideo, $\dim(V)=n$, allora le seguenti sono equivalenti:

i). f è una ISOMETRIA di (V,g), nel senso che $g(u,v) = g(f(u),f(v))$ $\forall u,v\in V$

ii). Per ogni base ORTONORMALE $\{v_1,\dots,v_n\}$ di (V,g), anche $\{f(v_1),\dots,f(v_n)\}$ è ORTONORMALE. [f PORTA BASI ORTONORMALI IN BASI ORTONORMALI]

iii). $\|f(v)\|_g = \|v\|_g$ $\forall v\in V$

PROP (V,g) Euclideo, $\dim(V)=n$. $\mathcal{B}$ base ORTONORMALE di V invece $\mathcal{C}$ base di V. Allora:

$$\mathcal{C} \text{ BASE ORTONORMALE di } V \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V) \text{ ORTOGONALE}$$

Def.: (V,g) Euclideo.

$f \in \mathrm{End}(V)$ è detto AUTOAGGIUNTO (rispetto a g)

$$g(f(v),w) \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} \quad g(f(v),w) = g(v,f(w)) \quad \forall v,w \in V$$

(f si dice anche SIMMETRICO).

PROP: (V,g) Euclideo, $\dim(V)=n$, $f \in \mathrm{End}(V)$, $\mathcal{B}$ base ORTON.

Allora

$$f \text{ AUTOAGGIUNTO} \iff M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \text{ è SIMMETRICA}$$

LATO ENDOMORFISMI

LATO MATRICI (qui è più facile verificare!)

Dim.: $A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$. $\mathcal{B}$ ORTONORMALE $\Rightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(g) = I_n$.

Abbiamo visto che:

$$g(f(v), w) = {}^t f(v) \cdot M_B(g) \cdot w$$
$$\downarrow = {}^t(A.v) \cdot \underline{I_n} \cdot w$$
$$\downarrow = {}^t v \,.\, {}^t A \cdot I_n \cdot w$$
$$\downarrow = {}^t v \,.\, {}^t A \,.\, w$$
$$g(v, f(w)) = {}^t v \,.\, A \,.\, w$$

IN GENERALE SE ${}^t v . {}^t A . w \overset{♥}{=} {}^t v . A . w$, QUESTO NON IMPLICA AUTOMATICAM. CHE ${}^t A = A$. PERÒ QUESTO È VERO $\forall v, w \in V$ ★

Allora $\underline{g(f(v), w) = g(v, f(w))} \iff {}^t A = A \iff A$ simmetrica

$\iff M_B^B(f)$ simmetrica

$\Updownarrow$ DEF

f è AUTOAGGIUNTO

★ QUINDI POSSIAMO SCEGLIERE I VETTORI (v, w) CHE VOGLIAMO, IN PARTICOLARE SCEGLIENDO $v = e_i$, $w = e_j$ OTTENIAMO DALL' EQUAZIONE ♥ CHE $a_{ij} = a_{ji}$, QUESTO VALE $\forall (i, j)$ E QUINDI ${}^t A = A$.

□

Lemma: Valgono le seguenti.

① $A \in M_n(\mathbb{R})$ SIMMETRICA $\Rightarrow P_A(t)$ HA n RADICI REALI [non nec. distinte]

② (V, g) Euclideo, $\dim(V) = n$, f AUTOAGGIUNTO $\Rightarrow P_f(t)$ HA n RADICI REALI [non nec. distinte]

È chiaro che 1. e 2. sono equivalenti per la prop. precedente.

TEOREMA [TEOREMA SPETTRALE ]

(V, g) Euclideo, $\dim(V) = n$, $f \in End(V)$ AUTOAGGIUNTO rispetto al prodotto scalare g. Allora ESISTE UNA BASE ORTONORMALE $\mathcal{B}$ di (V, g) CHE DIAGONALIZZA f.

Dim.: per induzione su n.

Se $n=1$, allora $\{v_1\}$ diagonalizza f $\forall v_1 \in V$, quindi possiamo scegliere $\mathcal{B} := \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|_g} \right\}$ ORTONORM ✓

Assumiamo vero l'enunciato per $n-1$.

Per il lemma sopra [il polin. caratteristico ha n radici reali] allora esiste almeno UN AUTOVALORE $\lambda \in \mathbb{R}$

Sia v il corrispondente autovettore $[f(v) = \lambda v]$

Sia $U := \{v\}^{\perp}$. Calcoliamo:

$$\forall u \in U: \quad g(f(u), v) \underset{f \text{ AUTOAGGIUNTO}}{=} g(u, f(v)) \overset{\text{AUTOVETTORE}}{=} g(u, \lambda v)$$

$$\underset{\text{BILINEARITÀ}}{=} \lambda g(u, v) \underset{\text{perché } u \in U,\ U = \{v\}^{\perp}}{=} 0$$

SI LEGGE: NON SOLO u È ORTOGON. A v, MA ANCHE LA SUA IMMAGINE $f(u)$

Abbiamo ottenuto che $f(u) \in U$.

Quindi f porta vettori ortogonali a v in vettori ortogonali a v, quindi

$$f|_U : U \to U$$

Quindi $f|_U \in \mathrm{End}(U)$. Ricordiamo che $g|_U$ è anch'esso un prodotto scalare, quindi $(V|_U = U, g|_U)$ è uno spazio Euclideo con $f|_U$ ENDOMORFISMO ANCORA AUTOAGGIUNTO rispetto a $g|_U$.

MA

$$V = \boxed{\mathrm{Span}(v)} \oplus \boxed{\{v\}^{\perp} =: U}$$

Allora $\dim(U) = n-1$

$$\underset{\dim = n}{n} = \underset{\dim = 1}{1} + \underset{\dim = n-1}{(n-1)}$$

Quindi per ipotesi induttiva, per $f|_U$ ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO di $(U, g|_U)$ di $\dim = n-1$, ESISTE UNA BASE ORTONORMALE di U CHE DIAGONIZZA $f|_U$

Questa base la chiamiamo $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$.
E allora la base di V che diagonalizza f sarà data da:

$$\left\{ v_1, \dots \dots \dots, v_{n-1}, \frac{v}{\|v\|} \right\} \quad \square$$

Cor.: A SIMMETRICA $\in M_n(\mathbb{R})$. Allora $\exists C \in O(n)$ tale che

$$C^{-1} A C = \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & & \\ & \ddots & \\ & & \bullet \end{pmatrix}}_{\text{DIAGONALE}}$$

In particolare OGNI MATRICE SIMMETRICA È DIAGONALIZZABILE

Dim.: $\mathcal{B}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$, è chiaramente ORTONORMALE rispetto al prodotto scalare canonico.
Siccome $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$, allora L_A è AUTOAGGIUNTO (perché per ipotesi A è simmetrica). Per il TEOREMA SPETTRALE $\exists$ base $\tilde{\mathcal{B}}$ ORTONORMALE che diagonalizza L_A, cioè tale che:

$$\left(M_{B}^{\tilde{B}}(Id_{\mathbb{R}^n})\right)^{-1} A \cdot M_{B}^{\tilde{B}}(Id_{\mathbb{R}^n}) \text{ è diagonale}$$

Siccome B e $\tilde{B}$ sono basi ORTONORMALI, $\underline{M_{B}^{\tilde{B}}(Id_{\mathbb{R}^n})}$ è ORTOGONALE per la PROP vista in precedenza e quindi prendiamo $C := M_{B}^{\tilde{B}}(Id_{\mathbb{R}^n})$ e abbiamo

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cdot \end{pmatrix}$$ come volevasi dimostrare $\square$.

$\boxed{\text{PROP.:}}$ (V, g) Euclideo. f AUTOAGGIUNTO, siano λ, μ due autovalori di f DISTINTI. Allora

L'AUTOSPAZIO RELATIVO a λ $V_\lambda := \ker(f - \lambda \cdot Id_V)$

V_λ e V_μ SONO ORTOGONALI

Dim: $\forall v \in V_\lambda$, $\forall w \in V_\mu$. Prima osserviamo che:

$$\lambda g(v,w) \underset{\text{BILINEARITÀ}}{=} g(\lambda v, w) \underset{\text{AUTOVALORI}}{=} g(f(v), w) \underset{\text{AUTOAGGIUNZIONE}}{=} g(v, f(w)) \underset{\text{AUTOVALORI}}{=} g(v, \mu w) \underset{\text{BILINEARITÀ}}{=} \mu g(v,w)$$

Quindi $\lambda g(v,w) = \mu g(v,w)$, MA PER IPOTESI $\lambda \neq \mu$, QUINDI, necessariamente, $g(v,w) = 0$. $\square$

§. Algoritmo per spazi Euclidei (V,g) con $f \in End(V)$ Autoaggiunto, per trovare una base $\mathcal{B}$ che diagonalizza f:

STEP I: Scegliere una base ORTONORMALE $\tilde{\mathcal{B}}$ QUALSIASI di V.
Settiamo $A := M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(f)$, che è SIMMETRICA per PROP.

STEP II: Calcolare $P_f(t) := \det(A - t \cdot I_n) \in \mathbb{R}[t]$ con RADICI DISTINTE $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ← LEMMA

$$P_f(t) = (\lambda_1 - t)^{m_a(\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t)^{m_a(\lambda_k)}$$

STEP III: Per ogni $i = 1, \dots, k$ determinare una BASE $\{W_{i,1}, \dots, W_{i,\underbrace{m_g(\lambda_i)}_{\text{MOLTEPL. GEOMETRICA}}}\}$ dell'autospazio V_{λ_i}

Osservare che $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ perché f è diagonalizzabile per il teorema spettrale.

Questa base si determina risolvendo il sistema lineare:

$$(A - \lambda_i \cdot I_n) . x = 0$$

STEP IV: Per ogni $i = 1, \dots, k$ APPLICHIAMO GRAM-SCHMIDT ai vettori $W_{i,1}, \dots, W_{i,m_g(\lambda_i)}$ e troviamo una base ORTONORMALE $\{V_{i,1}, \dots, V_{i,m_g(\lambda_i)}\}$ di V_{λ_i}.

STEP V: $\mathcal{B} := \{ v_{1,1}, \dots\dots, v_{k, m_g(\lambda_k)} \}$ è una base ORTONORMALE di (V, g) che DIAGONALIZZA f.

(Perché per la PROP precedente sappiamo che $v_{i,l} \perp v_{j,m}$ $\forall i, l, j, m$).

Esempio: come trovare in pratica una base ortonormale che diagonalizza un endomorfismo autoaggiunto

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(t) := \det(A - t \cdot I_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 6-t & 2 \\ 2 & 9-t \end{vmatrix} = t^2 - 15t + 50$$

$$= (t-10)(t-5)$$

Quindi gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = 10 \rightsquigarrow V_{10} = \ker(A - 10 \cdot I_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 6-10 & 2 \\ 2 & 9-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = 5 \rightsquigarrow V_5 = \ker(A - 5 \cdot I_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 6-5 & 2 \\ 2 & 9-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

GUARDIAMO AGLI AUTOSPAZI

Quindi ora sappiamo che:

- $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ è l'autovettore rispetto all'autovalore $\lambda_1=10$

  $\left(\text{cioè: } \begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 10\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right)$ ✓

  A

  AUTOVALORE RELATIVO ALL'AUTOVETTORE $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

  AUTOVETTORE RELATIVO ALL' AUTOVALORE $\lambda_1=10$

- $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ è l'autovettore " " $\lambda_2=5$

  cioè: $\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ✓

Quindi una base ORTOGONALE è data dagli autovettori (per PROP volta scorsa!)

Allora $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ BASE ORTOG $\Rightarrow \tilde{\mathcal{B}}=\left\{\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ BASE ORTON.

La matrice del cambio di base da $\tilde{\mathcal{B}}$ alla base canonica è

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \underbrace{O(2)}_{\text{ORTOGONALE}}$$

VERIFICARE CHE ${}^tC = C^{-1}$, cioè

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cioè in altri termini che

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

E quindi vale l'uguaglianza:

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \text{diagonale} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

In pratica

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Controesempio al teorema spettrale per matrici simmetriche complesse [ANZICHÉ REALI, come richiede il teorema].

Consideriamo $A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ **SIMMETRICA COMPLESSA**, e vediamo che **NON** è DIAGONALIZZABILE.

$$P_A(t) := \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ i & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)(-1) + (-1)(-1)$$

$$= -1 + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} Sp(A) = \{0\} \\ m_a(\lambda=0) = 2 \end{cases}$$

Considero $\ker(A - 0 \cdot I_2) = \ker(A)$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ i \cdot x_1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \right\} \Rightarrow \underbrace{\dim(V_0)}_{= m_g(0)} = 1$$

Allora lo spettro contiene un solo autovalore $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica $m_a(0) = 2$ e molteplicità geometrica $m_g(0) = 1$. Quindi abbiamo dimostrato che $m_a(0) \underset{\neq}{\geq} m_g(0)$, $0 \in Sp(A)$.

Perciò per il **SECONDO CRITERIO** della diagonalizzazione la matrice A **NON PUÓ ESSERE DIAGONALIZZABILE** anche se è **SIMMETRICA**

$\square$