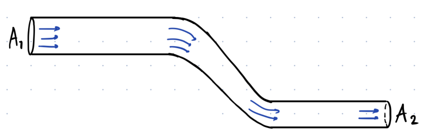
Lezione 9: Dinamica dei fluidi

1 Concetti discussi

Moto dei fluidi ideali, Teorema di Bernoulli, legge di Torricelli tubo di venturi. Fluidi reali.

2 Modo di un fluido ideale

Un fluido si definisce ideale quando è privo di viscosità ed è incomprimibile. Il fatto che sia privo di viscosità significa che non esistono forze di attrito e che quindi l'energia meccanica è conservata.



Per studiare il moto di un fluido ideale ci affidiamo al **principio di continuità**. Consideriamo un condotto con sezioni A_1 e A_2 come in figura. Il principio di continuità ci dice che la massa che passa per unità di tempo deve essere costante. Scritto in modo matematico possiamo scrivere che $m_1/\Delta t = m_2/\Delta t$ e quindi $\frac{\rho V_1}{\Delta t} = \frac{\rho V_2}{\Delta t}$, dove V_1 e V_2 sono i volumi che passano tra le due sezioni nell'arco di tempo. Questi volumi possiamo riscriverli come $V_1 = A_1 \Delta x_1$ e $V_2 = A_2 \Delta x_2$. Possiamo quindi riscrivere l'equazione di prima come

$$A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \tag{1}$$

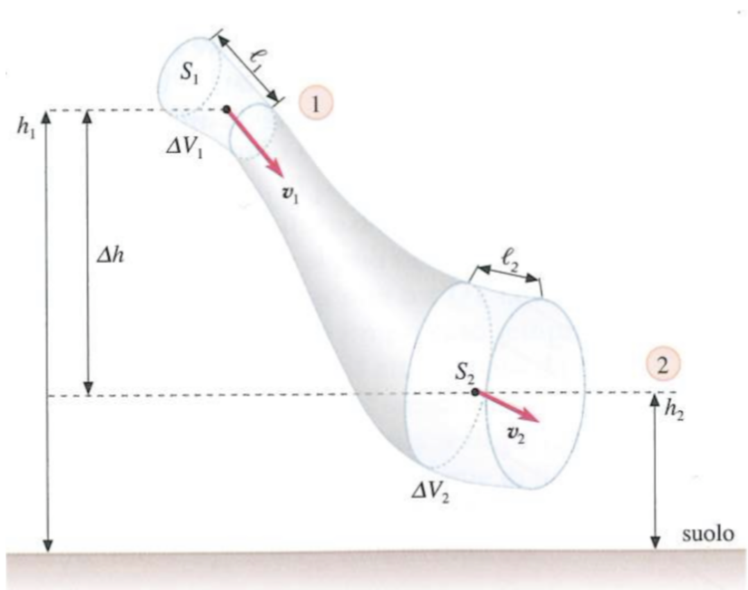
e quindi, dato che $\Delta x/\Delta t$ è la velocità del fluido

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{2}$$

A questo punto possiamo possiamo introdurre una nuova quantità: la **portata**. La portata è definita come vA. Quindi per il teorema di continuità la portata è costante!

3 Teorema di Bernoulli

Nella scorsa lezione abbiamo visto che la legge di Stevino è la legge fondamentale che ci permette di studiare un fluido in quiete. L'equazione di Bernoulli è l'equivalente per la fluido dinamica. In pratica è il principio di conservazione dell'energia meccanica applicato ad un fluido e lega tra di loro diverse forme di energia per unità di volume (densità di energia).



Le ipotesi alla base del teorema di Bernoulli sono che il fluido sia ideale, quindi incomprimibile e non viscoso (no forze di attrito), che scorra in un condotto rigido e che sia in moto stazionario (ovvero le proprietà di ciascun punto del fluido non variano nel tempo).

Il teorema ci dice che

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = constante \tag{3}$$

dove P è la pressione agente su una superficie del fluido, h l'altezza della superficie e v la velocità di movimento del fluido.

Possiamo provare a dimostrarlo. Consideriamo una conduttura come in figura e consideriamo il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul liquido nella regione delimitata fra le due superfici S_1 ed S_2 in un intervallo di tempo Δt in cui si passa dalla condizione iniziale 1 a quella finale 2. In questo intervallo di tempo il liquido sarà avanzato del tratto $l_1 = v_1 \Delta t$ nella regione 1 e di conseguenza di $l_2 = v_2 \Delta t$ nella regione 2. Per l'equazione di continuità $S_1 v_1 = S_2 v_2$, moltiplicando entrambi i lati per Δt otteniamo quindi che $S_1 l_1 = S_2 l_2$. $S_1 l_1$ è il volume che del fluido che si è spostato e quindi $V_1 = V_2 = V$ (costante). Dunque la massa di liquido che si è spostato è $m = \rho V$.

Il lavoro della forza di pressione ($forza = P_1 S_1$) sulla superficie S_1 per fare avanzare il liquido di un tratto l_1 è $L_1 = Forza \cdot l_1 = P_1 S_1 l_1 = P_1 V$. Il lavoro della forza di pressione sulla superficie S_2 per fare avanzare il liquido di un tratto l_2 è $L_2 = P_2 V$. Non essendoci attriti, abbiamo bisogno che l'energia sia conservata e quindi il lavoro totale sia lo stesso. Questo significa che la somma di energia cinetica, potenziale ed il lavoro delle forze di pressione sia conservato nel punto uno e nel punto due. Ne consegue che:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + P_1 V = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 + P_2 V \tag{4}$$

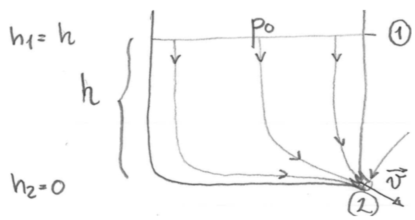
e quindi dividendo per il volume V

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + P_2 \tag{5}$$

Che è quello che volevamo dimostrare.

Si noti che se la velocità è nulla $v = 0$ allora ci rimane che $P + \rho gh = costante$ ovvero la legge di Stevino!

3.1 Velocità di un flusso da un recipiente e teorema di Torricelli



Consideriamo un recipiente come in figura. Sulla superficie A_1 si esercita unicamente la pressione atmosferica p_0. Questa pressione sarà la stessa all'uscita del tubo. Con l'equazione di Bernoulli possiamo quindi scrivere che

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + P_2 \tag{6}$$

Il foro è aperto, quindi P_1 e P_2 sono sostanzialmente le stesse. Questo perchè sul liquido che esce agisce proprio la pressione atmosferica e visto che siamo in regime stazionario (velocità costante), la pressione in uscita e quella atmosferica devono eguagliarsi. Quindi $P_1 = P_2$. Inoltre $h_0 = 0$. Quindi possiamo riscrivere l'equazione di prima come:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{7}$$

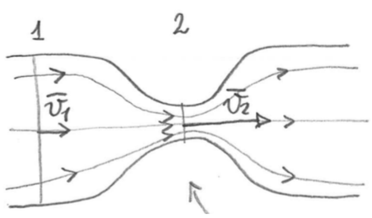
e quindi la velocità di uscita $v_2^2 = v_1^2 + 2gh$.

Nel caso in cui il contenitore fosse molto largo, quindi A_1 molto grande rispetto al foro, la velocità con cui si svuota è molto piccola $v_1 \ll v_2$. Ne consegue che

$$v_2 = \sqrt{2gh} \tag{8}$$

Questo è il teorema di Torricelli.

3.2 Tubo di Venturi



Il tubo di Venturi è un tubo orizzontale con una strozzatura (come in figura). Vogliamo quindi calcolare le velocità e la pressione fuori e dentro la strozzatura. Come prima usiamo l'equazione di Bernoulli. In questo caso le altezze sono uguali quindi

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 \tag{9}$$

dove P_1 è la pressione nella sezione esterna e P_2 nella strozzatura. Dall'equazione di continuità sappiamo che la portate è costante quindi:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{10}$$

Ne consegue che $v_2 > v_1$. Per l'equazione di Bernoulli, se la velocità è grande allora la pressione deve essere bassa. Quidni, $P1 > P2$. Ne consegue che se un tubo presenta una strozzatura, allora in quel punto la velocità è maggiore ma la pressione è minore.

4 Fluidi reali

Fino ad ora abbiamo studiato fluidi ideali in cui non c'è attrito tra il fluido e le pareti del tubo, il moto è stazionario e la velocità è la stessa su tutta la sezione della condotta. In un fluido reale abbiamo attrito e il moto del fluido può essere più complesso. Il flusso del fluido può essere **laminare** oppure **turbolento**. In caso di flusso laminare, la velocità non è la stessa su una sezione ma il fluido si muove con una traiettorie stazionarie e ben definite (ad esempio, la parte di fluido vicino alle pareti, rimane vicino alle pareti e si muove ad una velocità inferiore). Nel caso di un flusso turbolento, le traiettorie si intersecano e non sono stazionarie. Un flusso turbolento di si ha per esempio quando il moto è troppo veloce e ci sono delle ostruzioni.

4.1 Attrito nei fluidi

L'attrito nei fluidi si manifesta tra diversi strati del fluido oppure tra un oggetto immerso nel fludio ed il fluido stesso. Questa forma di attrito è associato alla viscosità e si indica con η il coefficiente di viscosità. Questo coeffieciente varia con al temperatura del fluido. La forza associata alla viscosità si chiama **forza di Stokes** ed è proporzionale alla velocità del fluido.

Nel caso in cui una sfera di raggio R sia immersa in un fluido, la forza di Stokes è:

$$F = 6\pi R\eta v \tag{11}$$

dove v è la velocità del fluido relativa alla sfera.

Quando un fluido viscoso è in moto con una certa velocità può accadere che i vari strati di fluido non scorrano più l'uno sull'altro ma si mescolino creando dei vortici. In questo caso il moto è turbolento. Per un fluido che si muove all'interno di una conduttura di raggio R esiste una formula che ci permette di calcolare che tipo di flusso ci sarà (laminare o turbolento). La formula è quella del **numero di Reynolds** N_R che vale

$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta} \tag{12}$$

dove $\bar{v}$ è la velocità media nella conduttura. In particolare se $N_R < 1000$ allora il flusso è laminare, se $1000 < N_R < 3000$ il flusso è instabile mentre se $N_R > 3000$ il flusso è turbolento.