Lezione 5 dicembre 2023

martedì 5 dicembre 2023 09:25

Teo: Ogni cubica nonsingolare $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$,

$C = Z_p(F)$, è proiett. equivalente a

$x_0 = 0$: $x_1^3 = 0$ $(0:0:1)$

$$x_0 x_2^2 = x_1 (x_1 - x_0)(x_1 - c x_0) \qquad c \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \ c \neq 1$$

$$y^2 = x(x-1)(x-c)$$ FORMA DI LEGENDRE.

Dim.: $C = Z_p(F)$

H_F hessiano, $\deg H_F = 3$

Sing $C = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\exists$ almeno 1 flesso Q

$\mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}}$

Bezout $\Rightarrow$

$C \cap Z_p(H_F) \neq \emptyset$

Cons. una proiettività t.c. $T(Q) = (0:0:1) \in U_2$

$T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

& t.c. t_g di flesso $t_Q C$: $T(t_Q C) = Z_p(x_0)$

l'eq. affine in $U_2 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$= \{x_2 \neq 0\}$

$$U_2 \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \to \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right) = (z, w)$$

$x_0 = 0 \longrightarrow z = 0$

$(z : w : 1) \longleftarrow (z, w)$

$(0:0:1)$ flesso $\longrightarrow (0,0)$

$x_0 \longleftrightarrow z$

Ora: il flesso è $(0,0)$

con tg. $z = 0$.

in $U_2 \cong \mathbb{A}^2$ l'eq è:

$$z + \cancel{\delta} \cdot x^2 + \alpha z x + \beta z^2 + a x^3 + b x^2 z + c x z^2 + d z^3 = 0$$

flesso in $(0,0)$: quando interseco con $z=0$

la molt. di int. in $(0,0)$ è ≥ 3

cioè la radice $x=0$ deve avere molt. alg. 3

$z=0$

$\delta x^2 + a x^3 = 0$ la radice $x=0$ ha molt. alg. $\geq 3 \Longleftarrow \delta = 0$.

$$z + \alpha z x + \beta z^2 + a x^3 + b x^2 z + c x z^2 + d z^3 = 0$$

Nel proiettivo: torno in $U_2 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

omogeneizzo risp. a x_2:

$$x_0 x_2^2 + \boxed{\alpha x_0 x_1 x_2 + \beta x_0^2 x_2} + a x_1^3 + b x_1^2 x_0 + c x_1 x_0^2 + d x_0^3 = 0$$

Riscrivo l'equazione nella seguente forma:

$$x_0 x_2^2 + 2 x_0 x_2 \left(\frac{\alpha}{2} x_1 + \frac{\beta}{2} x_0\right) + \underbrace{a x_1^3 + b x_1^2 x_0 + c x_1 x_0^2 + d x_0^3}_{} = 0$$

e cons. una seconda proiettività $S: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$

t.c.

$$S^{-1}: \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - \frac{\alpha}{2} y_1 - \frac{\beta}{2} y_0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta/2 & -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

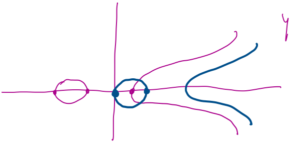
con questa sostituzione troviamo un'equazione del tipo

$y_0 y_2^2 + P(y_0, y_1) = 0$ con P polinomio omogeneo di grado 3.

su U_0: $y_0 \neq 0$: $y^2 + P(1, x) = 0$

$$y^2 = -P(1, x)$$

$$y = 0$$



in U_0 : $y^2 = \boxed{a} x^3 + b x^2 + c x + d$

siamo in $\mathbb{C}$: $y^2 = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

oss.: la curva è liscia per ipotesi

$\Longrightarrow \alpha_1 \neq \alpha_2, \ \alpha_1 \neq \alpha_3, \ \alpha_2 \neq \alpha_3$

cons. una affinità:

$$A^{-1} : \begin{cases} x = \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)}_{\neq 0} \bar{x} + \alpha_1 \\ y = \underbrace{\sqrt{a(\alpha_2 - \alpha_1)^3}}_{\neq 0} \bar{y} \end{cases}$$

$$\boxed{c := \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \qquad c \neq 0, \ c \neq 1$$

oss.: Siccome C è non singolare (liscia) le tre radici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tutte diverse tra loro (esercizio).

$$\Longrightarrow \boxed{\bar{y}^2 = \bar{x}(\bar{x}-1)(\bar{x}-c)}$$

Def.: Data $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cubica liscia (CUBICA ELLITTICA)

e sia $y^2 = x(x-1)(x-c)$ la sua rapp. di Legendre
$c \neq 0, \ c \neq 1$

il MODULO di C è

$$\underbrace{j(c)}_{} := \frac{(c^2 - c + 1)^3}{\underbrace{c^2 (c-1)^2}_{\neq 0}}$$

Teo: $\underset{y^2 = x(x-1)(x-c)}{C} \cong \underset{y^2 = x(x-1)(x-c')}{C'}$ proiettivamente equivalenti

$\Longleftrightarrow \quad j(c) = j(c')$

cioè: $j(c)$ è un INVARIANTE PROIETT. che individua la classe di equiv. proiettiva.

Dim.: Idea:

Se $C \cong C'$; $\begin{array}{c} C \cong Z_p(h(\underbrace{y^2 - x(x-1)(x-c)}_{})) \\ \wr\wr \\ C' \end{array}$

$\Rightarrow$ possiamo scegliere come modello di Legendre per C' una curva con $c' = c$.

$C \cong C'$, cioè $\exists\, T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $T(C') = C$

inoltre $\exists\, S : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $S(C) = \underbrace{Z_p(x_0x_2^2 - x_1(x_1 - x_0)}_{\tilde{C}}(x_1 - cx_0))$

cons.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 \arrow[r, "T"] & \mathbb{P}^2 \arrow[r, "S"] & \mathbb{P}^2 \\ C' \arrow[r] & C \arrow[r] & \tilde{C} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow j(c) = j(c')$.

Viceversa: Supp. $j(c) = j(c')$, con $c' \neq c$

Osservo che c' è radice del polinomio

$$\boxed{Q(x) := (x^2 - x + 1)^3 - j(c) \cdot x^2 \cdot (x-1)^2}$$

$$j(c) := \frac{(c^2 - c + 1)^3}{\underbrace{c^2(c-1)^2}_{}} = \frac{(c' - c' + 1)^3}{(c')^2(c'-1)^2} = j(c')$$

$Q(c') = 0$

il polinomio $Q(x)$ ha grado 6

$\Rightarrow$ ha 6 radici (contate con molteplicità)

e le sue radici sono:

$$\left\{ c,\ 1/c,\ 1-c,\ \frac{1}{1-c},\ \frac{c-1}{c},\ \frac{c}{c-1} \right\}$$

$c \neq 0$, $c \neq 1$

Quindi: $j(c) = j(c') \Leftrightarrow c' \in \{ \quad \}$

Infine: in ognuno dei 6 casi per c', si può esibire una proiettività T che

$$T(Z_p(h(y^2-x(x-1)(x-c)))) = Z_p(h(y^2-x(x-1)(x-c')))$$

vedere: Sernesi Geo1.

Teorema: $j(c) = \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2}$

$j : \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \longrightarrow \begin{array}{c}\mathbb{C}\\ \cup\!\mid \\ \bar{j}\end{array}$ è SURIETTIVA.

Dim: Fisso $\bar{j} \in \mathbb{C}$

Cons. $\boxed{Q(x)} = (x^2-x+1)^3 - \bar{j}\, x^2 (x-1)^2 \in \mathbb{C}[x]$

$\mathbb{C} = \bar{\mathbb{C}} \Longrightarrow \exists$ una radice di $Q(x)$

la chiamo $\underset{\in \mathbb{C}}{c}$: $\exists\; Q(c) = 0$

OSS.: $Q(0) = 1^3 - \bar{j}\cdot 0 = 1 \neq 0$

$Q(1) = 1^3 - \bar{j}\cdot 0 = 1 \neq 0$

cioè $(c^2-c+1)^3 - \bar{j}\, c^2(c-1)^2 = 0$

cioè: $\bar{j} = \boxed{\frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2}} = j(c)$

Siamo sicuri che $c \neq 0$ e $c \neq 1$?

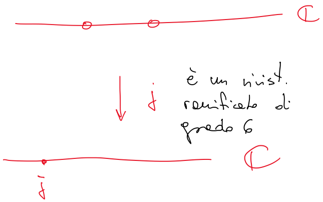
sì: $Q(0) = 1 - \bar{j}\cdot 0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow 0$ non è radice

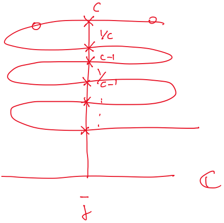
$Q(1) = (1-1+1)^3 - \bar{j}\, 1^2 \cdot 0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow 1$ non è radice.

OSS.: $j : \mathbb{C} - \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$

la generica fibra: $\bar{j} \in \mathbb{C}$, $z \in \underset{\text{aperto}}{U} \subseteq \mathbb{C}$

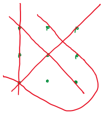
$\# j^{-1}(\bar{j}) = 6$





COR.: Le classi di equiv. proiettive delle cubiche lisce di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono ∞, una per ogni scelta di $j \in \mathbb{C}$, cioè sono classificate da $\mathbb{C}$.

Vedremo: Usando la forma di Legendre è possibile dimostrare che ogni cubica liscia ha esattamente 9 flessi, e 3 a 3 allineati.



* * *

STRUTTURA DI GRUPPO ABELIANO SU CUBICHE

Sia $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cubica liscia

Fisso flesso $O \in C$

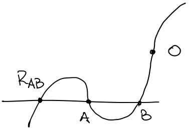
Def.: $*: C \times C \longrightarrow C$

$(A, B) \longmapsto A * B := R_{AB}$ t.c.

$$\overline{AB} \cap C = \{A, B, R_{AB}\}$$

OSS.: È possibile che sia $R_{AB} = A$ opp.

B (se $\overline{AB}$ è la tangente alla curva in A oppure in B).



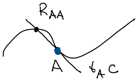
Se $A = B$

invece di $\overline{AB}$ cons. $\underset{\sim}{t_A C}$

R_{AA} è definito:

$t_A C \cap C$ = per Bèzout 3 punti contati molte.

pongo: R_{AA} = punto di int. residuo ad A in $t_A C \cap C$ se A NON è flesso



(in questo caso $m_A(C, t_A C) = 2$)

e quindi per Bèzout c'è un ulteriore punto di $C \cap t_A C$

invece $R_{AA} := A$ se A flesso

Quindi:

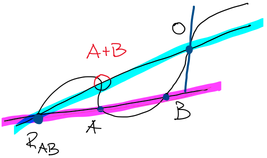
$$A * A = \begin{cases} R_{AA} \neq A & \text{se } A \text{ non flesso} \\ A & \text{se } A \text{ flesso} \end{cases}$$

Oss.: $*$ è commutativa? Sì per costruzione.

Def.: Fissiamo un punto $O \in C$ di flesso

$+ : C \times C \to C$

$$(A, B) \to A + B := (A * B) * O$$
$$= R_{AB} * O$$

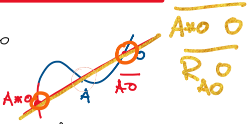


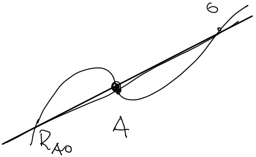
Teorema: $(C, +)$ è un gruppo abeliano

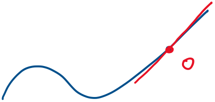
Dim.: • Neutro : cons. O flesso

$$A + O = (A * O) * O$$

$$R_{AO} * O = A$$







$A = O$

$O + O = O$

$$\underbrace{(O * O)}_{=O} * O = O$$

• commutativo perché $*$ lo è.

Vedremo: $-A = R_{AO} = A * O$

$$A + (-A) = O.$$