

Geometria 3 – Topologia

III appello d'esame

Anno accademico 2023-2024

10/6/2024

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.
Tempo a disposizione: 3 ore.

1) (8 punti) Consideriamo il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x^2 - y^2 - 1) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) (1 punti) X è compatto?

(b) (1 punti) X è connesso per archi?

(c) (2 punti) Quante componenti connesse per archi ha $\mathbb{R}^2 - X$?

(d) (2 punti) X è omeomorfo a \mathbb{R} ?

(e) (2 punti) X è contraibile?

2) (7 punti) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme limitato non vuoto.

(a) (3 punti) Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - A$ ha un'unica componente connessa per archi illimitata, che indichiamo con U .

(b) (4 punti) Dimostrare che esiste un epimorfismo $\pi_1(U) \rightarrow \mathbb{Z}$.

3) (7 punti) Determinare esplicitamente una base numerabile per \mathbb{R} (facendo anche vedere che è effettivamente una base).

4) (8 punti). Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se la diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.