# Lezione 3 dicembre 2024

martedì 3 dicembre 2024 17:05

Prossimo obbiettivo: studio delle CUBICHE PIANE

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\deg F = 3$

$F \in \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2])$ , $N(3,2) = \frac{3\cdot(3+3)}{2} = 9$

$= \mathbb{P}^{N(3,2)} = \mathbb{P}^9$

Pb.: Vogliamo fare una classificazione proiettiva (in classi di proiettività) delle cubiche piane.

Def.: Due curve proiettive $Z_p(F)$, $Z_p(\tilde{F})$ si dicono PROIETT. EQUIVAL. se $\exists\ T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ proiettività, $T = [A]$ , $A \in GL(3, \mathbb{C})$

$$T((x_0 : x_1 : x_2)) = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]$$

tale che $\underbrace{Z_p(\tilde{F}) = T(Z_p(F))}$

e $\underbrace{\tilde{F}(x_0, x_1, x_2) = F\left(A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)}$

(infatti: $(a_0 : a_1 : a_2) \in T(Z_p(F))$

$T^{-1}(a_0 : a_1 : a) \in Z_p(F)$ )

OSS.: L'equivalenza proiettiva è una relazione di equivalenza.

Pb: Individuare tutte le classi di proiettività di cubiche piane.

Vediamo quali nozioni vengono mantenute sotto proiettività:

PROP.: Sia $T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $T = [A]$

$r \subseteq \mathbb{P}^2$ retta , $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$

$r \not\subseteq Z_p(F)$ , $r = Z_p(L)$

$\tilde{r} = T(r)$ , $Z_p(\tilde{F}) = T(Z_p(F))$.
$\tilde{r} = Z_p(\tilde{L})$

Allora: $\forall\ Q \in Z_p(F) \cap r$ si ha

$$I_Q(F, L) = I_{T(Q)}(\tilde{F}, \tilde{L}).$$

Dim.: $r: \lambda Q + \mu R$ , $R \in r$, $R \neq Q$
$Q \in r$

$$F(\lambda Q + \mu R) =: G(\lambda, \mu)$$

$I_Q$ = molt. alg. della radice (1:0)

$\tilde{r}$: i suoi punti sono imm. dei punti di r

$$T(\lambda Q+\mu R) = \lambda\cdot T(Q)+\mu\cdot(T(R))$$

$I_{T(Q)}(\tilde{F},\tilde{L})$ : devo cons.

$$\underbrace{\tilde{F}(\lambda\cdot T(Q)+\mu\, T(R))} = \tilde{F}(T(\lambda Q+\mu R))$$

valutare la molt. alg. della coppia (1:0)

$$= \tilde{F}(A\cdot(\lambda Q+\mu R))$$

$$= F(A^{-1}\cdot(A\cdot(\lambda Q+\mu R)))$$

$$= F((A^{-1}\cdot A)\cdot(\lambda Q+\mu R))$$

$$= \underbrace{F(\lambda Q+\mu R)} = G(\lambda,\mu)$$

* * *

Consideriamo ora il caso delle cubiche:

Cubiche irriducibili: $d=3$

$$\#\text{ punti singolari} \le \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1$$

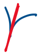
⇒ al più 1 punto singolare, ed è doppio:

infatti $$\sum \frac{m\cdot(m-1)}{2} \le \frac{(d-1)(d-2)}{2} = 1$$

$$\Rightarrow m=2$$

⇒ tg principali sono 2, distinte (NODO)

oppure coincidenti (CUSPIDE)



Teorema: $C = Z_p(F)$ irriducibile, $d=3$, singolare.

① se $C$ ha un nodo $\Rightarrow$ è proi. equiv. alla cubica

$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_0 x_1 x_2 = 0}$$

eq. aff.: $x^3+y^3+xy=0$

② se $C$ ha una cuspide, $\Rightarrow$ è proi. equiv. alla cubica:

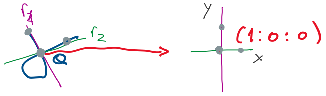
$$\boxed{x_1^3 + x_0 x_2^2 = 0}$$

eq. affine $\boxed{x^3 + y^2 = 0}$

Dim.: ① Cons. una proiettività $T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che

- nodo $Q \longrightarrow (1:0:0)$
- le tg principali $r_1 \longrightarrow Z_p(x_1)$

  $r_2 \longrightarrow Z_p(x_2)$



La nuova equazione sarà del tipo: nell'aperto $U_0 \cong \mathbb{A}^2 \ni (0,0)$

$$xy + a x^3 + b x^2 y + c \cdot x y^2 + d y^3 = 0$$

$C$ irriducibile $\Rightarrow T(C)$ è irriducibile

$\Rightarrow a \neq 0$ e $d \neq 0$

omogeneizzo: $x_0 x_1 x_2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + d x_2^3 = 0$

Cons. una ulteriore proiettività:

$S : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ t.c.

una qualunque radice cubica di $d^{-1}$, ovvero $e^{-1}$

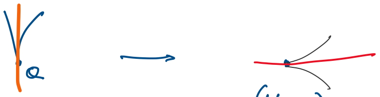
$$S^{-1} : \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{d^{-1}}\, y_0 \\ x_1 = \sqrt[3]{e^{-1}} \cdot y_1 \\ x_2 = -c \cdot \sqrt[3]{d^{-1}}\, y_0 - b \sqrt[3]{e^{-1}}\, y_1 + \sqrt[3]{e \cdot d}\, y_2 \end{cases}$$

matrice associata
$$\begin{pmatrix} \sqrt[3]{d^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{e^{-1}} & 0 \\ -c \sqrt[3]{d^{-1}} & -b \sqrt[3]{e^{-1}} & \sqrt[3]{e\, d} \end{pmatrix}$$

è invertibile

② $Q$ cuspide, con tg. $r$

cons. proiettività
$$T : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$
$$Q \longrightarrow (1:0:0)$$
$$r \longrightarrow Z_p(x_2)$$



$(1:0:0)$

La nuova equazione affine sarà del tipo in $U_0 \cong \mathbb{A}^2$

$$y^2 + a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 = 0$$
$$= 0$$

irriducibile $\Rightarrow a \neq 0$

omogeneizzo: $x_0 x_2^2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + d x_2^3 = 0$

Cons. una ulteriore proiett. $S : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$

$$S^{-1} : \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 - \dfrac{b}{3a} y_0 \\ x_2 = y_2 + \left(\dfrac{b^2}{3a} - c\right) y_1 \end{cases}$$

ottengo una eq. del tipo

$$y_0 y_2^2 + a y_1^3 + \delta y_0^3 = 0$$

$$a \neq 0$$

Terza proiettività:

$$Z^{-1} : \begin{cases} y_0 = z_0 \\ y_1 = -\sqrt[3]{a^{-1}}\, z_1 \\ y_2 = z_2 - \delta \cdot z_0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow z_0 z_2^2 + z_1^3 = 0$$

Eventuali FLESSI di cubiche singolari:

① cubiche nodate

$$x_1^3 + x_2^3 + x_0 x_1 x_2 = 0$$

$$\underset{\text{matrice hessiana}}{M_F} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 6x_1 & x_0 \\ x_1 & x_0 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$h_F = \det M_F = -x_2(6x_2^2 - x_0 x_1) + x_1(x_0 x_2 - 6x_1^2)$$

$$= -6x_2^3 + x_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_2 - 6x_1^3$$

$$= 2x_0 x_1 x_2 - 6x_1^3 - 6x_2^3 \quad /:(-2)$$

$$\begin{cases} 3x_1^3 + 3x_2^3 - x_0 x_1 x_2 = 0 \\ \cancel{x_1^3} + \cancel{x_2^3} + \cancel{x_0 x_1 x_2} = 0 \end{cases}$$

$$-x_0 x_1 x_2 = +x_1^3 + x_2^3$$

$$-3x_0 x_1 x_2 - x_0 x_1 x_2 = 0$$

$$-4x_0 x_1 x_2 = 0 \quad : \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ : $\boxed{x_1^3 + x_2^3 = 0}$

$x_1 = 0$ : $x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_2 = 0$ : $x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_1 = z, \quad x_2 = 1$

$z^3 + 1 = 0, \quad z^3 = -1 \Rightarrow (x_1 : x_2) = (-1:1)$

$(z_2 : 1)$

$(z_3 : 1)$

$z_1, z_2, z_3$ radici cubiche di $-1$, sono tutte distinte

$z_1 = -1, \quad z_2 = e^{2\pi/3\, i}, \quad z_3 = e^{\frac{4\pi}{3} i}$

$$\left.\begin{matrix} (0 : -1 : 1) \\ (0 : z_2 : 1) \\ (0 : z_3 : 1) \end{matrix}\right\}$$

3 FLESSI sono allineati $\Rightarrow$ TUTTE le cubiche nodate hanno 3 flessi