

ISTANTONI in teorie di gauge non-abeliane

Tra tutti i campi (\rightarrow cammini) con winding number diverso da zero, consideriamo quelli che risolvono le eq. del moto Euclidea $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$

C'è un modo più semplice (rispetto a risolvere le eq. diff. (1)) per trovare le configurazioni che minimizzano S_{YM} :

$$S_{YM} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{In sp. Euclidea})$$

Ricordiamo che $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}$

Consideriamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} \pm *F^{\mu\nu}) = \\ &= \underbrace{2 \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})}_{\geq 0} \pm \underbrace{2 \int d^4x \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} *F^{\mu\nu})}_{\int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = 32\pi^2 w} \end{aligned}$$

(Vno sig con signo + da con $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$)

\Downarrow

$$S_{YM} \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |w| \quad (\text{Bogomolnyi Bound})$$

I campi che minimizzano S_{YM} saranno quelli che saturano il bound, cioè gli t.c. $S_{YM} = \frac{8\pi^2}{g^2} |w|$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = \pm *F_{\mu\nu}$$

(ANTI)-SELF DUAL
(0)

Qte configurazioni risolvono le eq. del vuoto

$$D^\mu F_{\mu\nu} \stackrel{\uparrow (0)}{=} \pm D^\mu * F_{\mu\nu} \stackrel{\uparrow}{=} 0$$

Identicom. valido

in le Identite di Bianchi.

Configurazioni che hanno AZIONE FINITA sono tali che

$$A_\mu^{(x)} \rightarrow -i U \partial_\mu U^{-1} \quad \text{a } x \rightarrow \infty \quad U \in \Omega$$

infinite \nearrow $U \in \Omega$

($F_{\mu\nu} \rightarrow 0$ a $x \rightarrow \infty$ affinché integrali in S^3 converga
 $F' = U F U^{-1}$ $A_\mu \cong 0 \Rightarrow F \cong U 0 U^{-1} = 0$;
 equiv. a meno di transf. di gauge

ovviamente $F_{\mu\nu} \neq 0$ in qualche regione di \mathbb{R}^4 ,
 affinché S_{YM} sia non nulla .)

\rightsquigarrow Il comportamento di A_μ all'infinito è descritto da
 una mappa

$$U : S_\infty^3 \rightarrow G$$

\rightsquigarrow queste mappe sono
 caratteristiche del
 gruppo di omotopia
 $\pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$

(vale $\forall G$ di Lie, eccetto
 $SO(4) \quad \pi_3(G) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

[analogo a quando abbiamo considerato $U : \mathbb{R}_x^3 \rightarrow G \quad U \in \Omega_x$
 ma ora stiamo considerando U diverse S_x^3
 e un diverso spazio delle trasformazioni di gauge.]

Consideriamo

$$\frac{1}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \partial_\mu K^\mu =$$

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} (A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta)$$

$$= \int_{S^3_\infty} K^\mu(A) d^3x = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_\infty} \text{tr} (U^{-1} dU)^3 \in \mathbb{Z}$$

\uparrow
 it is a pure gauge
 on S^3_∞

\Downarrow
 we can write the integrand
 in terms of U_∞

$$\left[K \propto A dA + \frac{2}{3} A^3 = U^{-1} dU dU^{-1} dU + \frac{2}{3} (U^{-1} dU)^3 = \right.$$

$$\left. = -U^{-1} dU U^{-1} dU U^{-1} dU + \frac{2}{3} (U^{-1} dU)^3 = -\frac{1}{3} (U^{-1} dU)^3 \right.$$

$$A = U^{-1} dU$$

$$0 = d(U^{-1} U) = dU^{-1} U + U^{-1} dU$$

$$\rightarrow dU^{-1} = -U^{-1} dU U^{-1}$$

]

Consideriamo le connessioni con w fissato

$$\left(\text{cioè tutte le connessioni con } w = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr } F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} \right)$$

ci interessa trovare il minimo di S_{YM} in pts dove, cioè conf. s.c.

$$F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu}$$

Qte conf. sono chiamate **INSTANTONI**

(sono localizzate attorno a un pts di \mathbb{R}^4)

Contribuiscono al P.I. con un FATTORE CARATTERISTICO

$$e^{-S_{\text{inst}}} = e^{-\frac{8\pi^2 |w|}{g^2}} e^{i\theta w}$$

↑
reale perché
siamo in signature
Euclidea

↑
rimane complesso
anche in signature
Euclidea

SINGOLO INSTANTONE in $SU(2)$

Consideriamo $G = SU(2)$. Vogliamo risolvere l'eq

$$F_{\mu\nu} = * F_{\mu\nu} \quad \text{con } w=1$$

Asintoticamente A_μ deve tendere a una pura gauge, cioè

$$A_\mu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -i U(x) \partial_\mu U^{-1}(x)$$

↑
dipende dalle coord angolari $\frac{x^\mu}{\sqrt{x^2}}$

Esaudiamo $U(x) = \frac{x_\mu \sigma^\mu}{\sqrt{x^2}} \quad \sigma^\mu = \left(1, \underbrace{-i\vec{\sigma}}_{(\sigma^0, \sigma^i)} \right)$

Allora $A_\mu(x) = -i f(x) U \partial_\mu U^{-1}$ dove $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$

Prendiamo $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + \rho^2}$ e verifichiamo che A_μ corrisponde

risolvere l'eq. $F_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu}$.

Usiamo: $\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu = \delta^{\mu\nu} \mathbb{1} + \underbrace{\sum_S^{\mu\nu}}_{\equiv \Sigma^{\mu\nu}} \sigma^S$ dove Σ è antisim. e self-duale

Antisim: $\sigma^i \bar{\sigma}^j = \sigma_p^i \sigma_p^j = \delta^{ij} \mathbb{1} + i \epsilon^{ijk} \sigma_p^k$
 $\sigma^0 \bar{\sigma}^j = \bar{\sigma}^j = i \sigma_p^j$
 $\sigma^j \bar{\sigma}^0 = \sigma^j = -i \sigma_p^j$
 $\sigma^0 \bar{\sigma}^0 = \mathbb{1}$

$\sum_0^{ij} = 0$ $\sum_k^{ij} = -\epsilon^{ijk}$
 $\sum_0^{0j} = 0$ $\sum_k^{j0} = \delta_k^j$
 $\sum_k^{0j} = -\sum_k^{j0}$
 $\Sigma^{\mu\nu}: \sum^{ij} = i \epsilon^{ijk} \sigma_p^k$
 $\sum^{i0} = -i \sigma_p^i$

Self-duale: $\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}$

$\Sigma^{01} = \frac{1}{2} \epsilon^{01\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} 2 \times \epsilon^{0123} \Sigma^{23} = \epsilon^{0123} i \epsilon^{231} \sigma_p^1 = i \sigma_p^1 = \Sigma^{01}$

$\Sigma^{12} = \frac{1}{2} \epsilon^{12\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} 2 \times \epsilon^{1230} \Sigma^{30} = -\epsilon^{123} (-i) \sigma_p^3 = \Sigma^{12}$

$U \partial_\mu U^{-1} = \frac{x_\nu \sigma^\nu}{\|x\|} \partial_\mu \left(\frac{x_\rho \bar{\sigma}^\rho}{\|x\|} \right) = \frac{x_\nu \sigma^\nu}{\|x\|} \left\{ \frac{\bar{\sigma}^\mu}{\|x\|} - \frac{x_\rho \bar{\sigma}^\rho}{\|x\|^3} x^\mu \right\}$

$= \frac{1}{\|x\|^2} \left\{ \underline{x_\nu} (\underline{\delta^{\mu\nu}} + \underline{\Sigma^{\nu\mu}}) - \underbrace{(x_\nu x_\rho)}_{\text{sym.}} \left(\underbrace{\delta^{\nu\rho}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\Sigma^{\nu\rho}}_{\text{antisym.}} \right) \frac{x_\mu}{\|x\|^2} \right\}$

$\cancel{x_\mu} + x_\nu \Sigma^{\nu\mu} - \cancel{x_\mu}$

$= \frac{x_\nu \Sigma^{\nu\mu}}{x^2}$

$A_\nu(x) = -i \frac{x_\mu \Sigma^{\mu\nu}}{x^2 + \rho^2}$

$\hookrightarrow F_{\mu\nu}:$

$$\partial_\mu A_\nu = -i \frac{\sum_{\mu\nu}}{x^2 + g^2} + i \frac{x_\alpha \sum^{\alpha\nu}}{(x^2 + g^2)^2} 2x_\mu$$

↓

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &= -\frac{2i \sum_{\mu\nu}}{x^2 + g^2} + \frac{2i}{(x^2 + g^2)^2} (x_\mu x_\alpha \sum_{\alpha\nu} - x_\nu x_\alpha \sum_{\alpha\mu}) \\ &= \frac{2i}{x^2 + g^2} \left(-\sum_{\mu\nu} + \frac{1}{x^2 + g^2} (x_\mu x_\alpha \sum_{\alpha\nu} - x_\nu x_\alpha \sum_{\alpha\mu}) \right) \end{aligned}$$

Per calcolare $i[A_\mu, A_\nu]$ usiamo la seguente proprietà:

$$[\sum_{\alpha\mu}, \sum_{\beta\nu}] = 2\delta_{\alpha\nu} \sum_{\mu\beta} + 2\delta_{\mu\beta} \sum_{\alpha\nu} - 2\delta_{\alpha\beta} \sum_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} i[A_\mu, A_\nu] &= -\frac{i}{(x^2 + g^2)^2} [x_\alpha \sum_{\alpha\mu}, x_\beta \sum_{\beta\nu}] = \\ &= \frac{2i}{(x^2 + g^2)^2} \underbrace{x_\alpha x_\beta}_{\text{sym}} (\delta_{\alpha\beta} \sum_{\mu\nu} + \cancel{\delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta}}_{\text{antisym.}} - \delta_{\alpha\nu} \sum_{\mu\beta} - \delta_{\mu\beta} \sum_{\alpha\nu}) \\ &= \frac{2i}{(x^2 + g^2)^2} (x^2 \sum_{\mu\nu} + \underbrace{x_\nu x_\beta \sum_{\beta\mu}}_{\text{wavy}} - \underbrace{x_\mu x_\alpha \sum_{\alpha\nu}}_{\text{wavy}}) \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] = -\frac{2i}{x^2 + g^2} \sum_{\mu\nu} \left(1 - \frac{x^2}{x^2 + g^2} \right)$$

$$= -\frac{2i g^2}{(x^2 + g^2)^2} \sum_{\mu\nu}$$

localizzato attorno
con un'ampiezza $\sim g$
 $x=0$
 $\sim g$

self-dual $\Rightarrow F_{\mu\nu}$ è self-dual,
cioè minimizza S_{YM}

Calcoliamos il winding number w .

$$\text{Tr} (\bar{\Sigma}_{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}) = 2 \text{Tr} \left(\sum_{i=1,2,3}^2 \sigma_i + \sum_{ij=12,23,31}^2 \right) = -6 \text{Tr} (\mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2) = -24$$

$$\Sigma_{\mu\nu}^2 = -\mathbb{1}$$

$$\underbrace{\epsilon^{ijk}}_{\delta^{kl}} \epsilon^{ljk} (i\sigma_p^k)(i\sigma_p^k) = -\mathbb{1}_2$$

$$w = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu} + \overset{\text{self-dual}}{F_{\mu\nu}}) = \frac{1}{16\pi^2} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr} (\Sigma_{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}) \int d^4x \frac{(-2i)^2 g^4}{(x^2 + g^2)^4} =$$

$$= \frac{+24 \cdot (+4)}{16\pi^2} g^4 \int d^4x \frac{1}{(x^2 + g^2)^4}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + a^2)^A} = \frac{\Gamma(A - d/2)}{(a^2)^{A-d/2} (4\pi)^{d/2} \Gamma(A)} \Rightarrow \int \frac{d^d x}{(x^2 + g^2)^4} = \frac{\Gamma(4-2) (\pi)^4}{(g^2)^{4-2} (\pi)^2 \Gamma(4)}$$

$d=4 \quad A=4 \quad a=g$

$\Gamma(n+1) = n! \Rightarrow \Gamma(2) = 1$
 $\Gamma(4) = 3!$

$$w = \frac{6 g^4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^4}{g^4 \pi^2 3!} = 1$$

Per $w > 1$ le soluzioni è molto più complicate.
 Però c'è un'approssimazione (appos. di gas diluito)

$$A_{\mu\nu}^{w=1} \Big|_{x=x_1} + A_{\mu\nu}^{w=1} \Big|_{x=x_2} \simeq A_{\mu\nu}^{w=2}$$

se $\|x_1 - x_2\| \gg g$



→ Nota: le soluzioni istantanee contengono dei parametri
 ↳ famiglie di soluzioni "zero modi"

es. $w=1$

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2 + g^2}$$

i parametri sono x_0, g

Mostriamo ora che la soluz. istantanea tratta (con $w=1$) è un cammino in $\mathcal{Q} = \mathcal{A} / \mathcal{G}_x$ e in particolare un loop con winding number 1.

↓
 Prima di tutto ci mettiamo nella gauge $A_0 = 0$. La soluz. istant. tratta non è in pt gauge → dobbiamo applicare una transf. di gauge per portare $A_0 \rightarrow A_0 = 0$.

$$A_0 = -i \frac{x_i \sum \sigma_i}{x^2 + g^2} = -i \frac{x_i \sum \overset{-i\sigma_i}{\sigma_i}}{x^2 + g^2} = -\frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{x^2 + g^2}$$

antisim *matrici di Pauli*

Consideriamo la transf. di gauge $W = e^{-i \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{|\bar{x}|} \zeta(x)}$

$$\text{dove } \zeta(x) = -\frac{|\bar{x}|}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg} \left(\frac{x_0}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} \right) \right)$$

$$\bullet \partial_0 \zeta = -\frac{|\bar{x}|}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} \frac{1}{1 + \frac{x_0^2}{|\bar{x}|^2 + g^2}} \frac{1}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}} = -\frac{|\bar{x}|}{x_0^2 + |\bar{x}|^2 + g^2}$$

$$\bullet \partial_0 W^{-1} = + W^{-1} i \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{|\bar{x}|} \frac{|\bar{x}|}{x^2 + g^2}$$

$$\bullet W \bar{x} \cdot \bar{\sigma} W^{-1} = \bar{x} \cdot \bar{\sigma}$$

commutano

$$\bullet W \xrightarrow{x_0 \rightarrow -x_0} \mathbb{1} \quad W \xrightarrow{x_0 \rightarrow +x_0} e^{+i\pi \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{\sqrt{|\bar{x}|^2 + g^2}}} \equiv -\tilde{W}(\bar{x})$$

$$\rightarrow A_0' = \underbrace{W A_0 W^{-1}}_{= A_0} - i W \partial_0 W^{-1} = -\frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{x^2 + y^2} + i \cancel{W} \cancel{W}^{-1} (-i) \frac{\bar{x} \cdot \bar{\sigma}}{x^2 + y^2} = 0$$

$$A_i' = W A_i W^{-1} - i W \partial_i W^{-1}$$

Cammino nella gauge $A_0' = 0$ è descritto dalla funz.

$$A_i'(\bar{x}, x_0) \quad \leftrightarrow \quad \text{analogo} \quad \gamma^M(t) \text{ in sp. } \mathbb{R}^4 \text{ (per esempio)}$$

\uparrow parametro della curva
 $\gamma: \mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^4$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} Q = \mathcal{A} / \Omega_x$$

\uparrow parametro tot. di $A_i'(\bar{x})$

Vediamo cosa succede agli estremi:

$$A_i' (x_0 \rightarrow -\infty) = A_i(\bar{x}) \quad (*)$$

$$A_i' (x_0 \rightarrow +\infty) = \tilde{W} A_i \tilde{W}^{-1} - i \tilde{W} \partial_i \tilde{W}^{-1} = A_i^{\tilde{W}}(\bar{x})$$

Questo è un loop in $Q = \mathcal{A} / \Omega_x$ se $\tilde{W} \in \Omega_x = \left\{ \text{map. } \mathbb{R}^3 \rightarrow G \right.$
 $\left. \text{t.c. } g \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \infty} \mathbb{1} \right\}$

$$\tilde{W} = -e^{\frac{i\pi \bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \infty} -e^{+i\pi \bar{\sigma} \cdot \hat{x}} = -(\cos(\pi) \mathbb{1} + i \sin(\pi) \bar{\sigma} \cdot \hat{x}) = \mathbb{1} \Rightarrow \tilde{W} \in \Omega_x$$

$\frac{\bar{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \equiv \hat{x}$

$\Rightarrow (*)$ è un loop in Q

\rightsquigarrow uno può provare che il winding number calcolato con \tilde{W} è $= 1$!

↓

Dato un campo $A_\mu(x_0, \vec{x})$ e quel un campo con fermioni χ_4

$$\frac{1}{16\pi^2} \int \text{tr} F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} = w[\tilde{W}]$$

\uparrow
 winding number

$$A_\mu \leftrightarrow n \in \pi_3(S^3) \xrightarrow{SU(2)}$$

\uparrow
 $S^3 \text{ e } x_0^2 + \vec{x}^2 \rightarrow \infty$

\downarrow
 cammino
 def da \tilde{W}

$$\leftrightarrow n \in \pi_3(S^3) \xrightarrow{SU(2)}$$

\uparrow
 $S^3 \text{ e } \mathbb{R}^3 \text{ compatto}$