ESERCIZI DI ANALISI 2
Anno accademico 2024/2025 – Ingegneria
Prof.ssa Rodica Toader

Integrali di forme differenziali

1. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\omega(x,y) = 3x^2y\,dx + x^3dy\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva definita da

$$\sigma(t) = (-t^2, t)\,.$$

2. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = (2x+4y+5z)\,dx + (4x+4y+6z)\,dy + (5x+6y+6z)\,dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t^2, -3t, t^2)\,.$$

3. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{aligned}\omega(x,y,z) = {} & (2x(y+z) + 3x^2 + y^2 + z^2)\,dx + \\ & +(2y(x+z) + x^2 + 3y^2 + z^2)\,dy + \\ & +(2z(x+y) + x^2 + y^2 + 3z^2)\,dz\,.\end{aligned}$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, t^2, -t)\,.$$

4. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = (3x^2y + z^3)\,dx + (3y^2z + x^3)\,dy + (3z^2x + y^3)\,dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, -t^2, 2t^2)\,.$$

5. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = \sin(xyz)\Big(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz\Big)\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva definita da

$$\gamma(t) = (2t, \pi t, t^2)\,.$$

6. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = y^2z(3x^2+z^2)\,dx + 2xyz(x^2+z^2)\,dy + xy^2(x^2+3z^2)\,dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, t^2, -t)\,.$$

7. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = 3x^2y\,dx - 6xy^2\,dy + 6xyz\,dz\,.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva data da

$$\gamma(t) = (t, -t^2, 2t^2)\,.$$

8. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = x\ dy \wedge dz - 2y\ dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la supreficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u, u+v, v)\,.$$

9. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x,y,z) = xy\ dy \wedge dz + xz\ dz \wedge dx - yz\ dx \wedge dy\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la supreficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u+v, u+v, u-v)\,.$$

10. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1\,dx_3 \wedge dx_1 + x_1x_2\,dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [-2,2] \times [1,3] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u^2, u+v, v^2)\,.$$

11. Sia ω la 2-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 - (x_1+x_3)x_2^2\,dx_3 \wedge dx_1 + 2x_1x_2x_3\,dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [1,2] \times [-1,0] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (v, uv, u)\,.$$