Appunti del corso di Istituzioni di Matematica

Prof.ssa Rodica Toader

Università degli Studi di Trieste, CdL STAN, a.a. 2024/2025

Matrici e vettori

Questa è una versione provvisoria, molto schematica degli appunti delle lezioni riguardanti vettori e matrici.

1 Lo spazio $\mathbb{R}^N$

Sia N un numero naturale, $N \geq 2$. Indichiamo con $\mathbb{R}^N$ il prodotto cartesiano

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{N \text{ volte}}.$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^N$ sono quindi N-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, dove x_1, x_2, $\ldots$, x_N sono numeri reali. Li indicheremo con i simboli

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots$$

Come già specificato nella definizione del prodotto cartesiano di insiemi, conta l'ordine in cui sono scritti gli elementi della N-upla. Per esempio in $\mathbb{R}^5$

$$(4, 2, 0, -5, 3) \neq (2, 4, 0, -5, 3)\,.$$

In questo corso siamo interessati soprattutto ai casi $N = 2$ o $N = 3$

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

In questi casi indicheremo le componenti dei vettori anche con (x, y), rispettivamente (x, y, z).

Dalla definizione di $\mathbb{R}^N$ come prodotto cartesiano segue che se

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_N)$$

si ha

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff x_1 = y_1,\, x_2 = y_2,\, \ldots,\, x_N = y_N$$

Operazioni in $\mathbb{R}^N$

Cominciamo con l'introdurre un'operazione di addizione in $\mathbb{R}^N$: dati due elementi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$, si definisce $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_N + x'_N)\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'')\,;$

b) esiste un "elemento neutro" $\boldsymbol{0} = (0, 0, \dots, 0)$: si ha $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x}$;

c) ogni elemento $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ha un "opposto" $(-\boldsymbol{x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_N)$: si ha $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\,;$

d) (commutativa) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}\,.$

Pertanto, $(\mathbb{R}^N, +)$ è un "gruppo abeliano". Normalmente, si usa scrivere $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ per indicare $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}')$.

Definiamo ora la moltiplicazione di un elemento di $\mathbb{R}^N$ per un numero reale: considerati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e un numero reale $t \in \mathbb{R}$, si definisce $\alpha\boldsymbol{x}$ in questo modo:

$$t\boldsymbol{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_N)\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $t(s\boldsymbol{x}) = (ts)\boldsymbol{x} = (st)\boldsymbol{x} = s(t\boldsymbol{x}),\,;$

b) $(s + t)\boldsymbol{x} = (s\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x})\,;$

c) $t(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = (t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}')\,;$

d) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,.$

Siccome valgono queste proprietà, l'insieme $\mathbb{R}^N$ con le operazioni introdotte è uno "spazio vettoriale". Chiameremo i suoi elementi "vettori"; i numeri reali, in questo ambito, verranno chiamati "scalari".

Indipendenza lineare. Iniziamo osservando che un vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ può essere scritto come:

$$\boldsymbol{x} = x_1(1, 0) + x_2(0, 1)\,.$$

Poniamo

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)\,.$$

Allora

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2\,.$$

I vettori $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ formano la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Vediamo ora più in dettaglio il significato di questa frase.

Combinazione lineare. Diremo che un vettore $\boldsymbol{x}$ (elemento di $\mathbb{R}^N$) è combinazione lineare di altri vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ se esistono scalari $t_1, \dots, t_m$ tali che:

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_m\boldsymbol{v}_m.$$

In questo caso i numeri reali $t_1, \dots, t_m$ vengono chiamati anche coefficienti della combinazione lineare.

Definizione. I vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ sono linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare nulla è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli:

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0} \implies t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_m = 0.$$

Esempi 1. I vettori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ sono linearmente indipendenti. Infatti,

$$t_1\boldsymbol{e}_1+t_2\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0} \iff t_1(1,0)+t_2(0,1)=(0,0) \iff (t_1,0)+(0,t_2)=(0,0) \iff \begin{cases} t_1=0 \\ t_2=0. \end{cases}$$

2. Consideriamo i vettori $(1,2)$ e $(3,6)$. Esaminiamo se sono linearmente indipendenti:

$$t_1(1,2)+t_2(3,6)=(0,0).$$

Sviluppando il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} t_1+3t_2=0, \\ 2t_1+6t_2=0. \end{cases}$$

Risolvendo:

$$t_1=-3t_2, \quad 2(-3t_2)+6t_2=0 \implies t_2=1, \quad t_1=-3.$$

Pertanto, i vettori non sono linearmente indipendenti, poiché esistono soluzioni diverse da $t_1=0$ e $t_2=0$.

3. Consideriamo i vettori $\boldsymbol{v}=(2,4)$ e $\boldsymbol{w}=(3,5)$. Esaminiamo se sono linearmente indipendenti:

$$t_1(2,4)+t_2(3,5)=(0,0),$$

è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2t_1+3t_2=0, \\ 4t_1+5t_2=0. \end{cases}$$

La soluzione è $t_1=0$, $t_2=0$, quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

Vediamo ora se $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$, ossia se dato un qualsiasi vettore $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, esistono $s,t\in\mathbb{R}$ tali che:

$$\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}\,.$$

Il sistema:

$$\begin{cases} x_1=2s+3t, \\ x_2=4s+5t, \end{cases}$$

porta a:

$$\begin{cases} s=\frac{x_1-3t}{2}, \\ x_2=2(x_1-3t)+5t, \\ x_2=2x_1-6t+5t, \\ t=2x_2-x_1. \end{cases}$$

Sostituendo, troviamo anche s in funzione di x_1,x_2. Pertanto qualsiasi elemento di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, dunque $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$.

Linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo i vettori $(1,-1,2)$, $(2,0,1)$ e $(1,2,3)$. Verifichiamo la loro indipendenza risolvendo:

$$a(1,-1,2)+b(2,0,1)+c(1,2,3)=(0,0,0).$$

Il sistema risultante:

$$\begin{aligned} a+2b+c&=0,\\ -a+2c&=0,\\ 2a+b+3c&=0, \end{aligned}$$

ha l'unica soluzione $a=0$, $b=0$, $c=0$, quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

Prodotto Scalare

Siano $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_N)$ e $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_N)$. Il prodotto scalare è definito come:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_Ny_N.$$

Se $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$, diciamo che i vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono ortogonali.

Esempio

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}&=(1,2,3),\\ \boldsymbol{y}&=(-5,1,-3),\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}&=1\cdot(-5)+2\cdot 1+3\cdot(-3)=-5+2-9=-12. \end{aligned}$$

Norma Euclidea

La norma di un vettore $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^N$ è:

$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_N^2}.$$

Esempio. Per i seguenti vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ calcoliamo il prodotto scalare e le norme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}&=(-1,0,2),\\ \boldsymbol{v}&=(2,3,-1),\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}&=-1\cdot 2+0\cdot 3+2\cdot(-1)=-2+0-2=-4,\\ \|\boldsymbol{u}\|&=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\\ \|\boldsymbol{v}\|&=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Esercizio Dati i seguenti gruppi di vettori trovare eventuali coppie di vettori ortogonali ed eventuali coppie di vettori linearmente dipendenti.

a. $(2-1,1),(1,2,-1),(1,4,2),(2,4,4)$;

b. $(3,0,5),(1,2,7),(6,0,10),(0,8,0)$.

Definiamo infine, solo nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, il “prodotto vettoriale” tra due vettori: dati $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, si definisce il vettore $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ in questo modo:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2\,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3\,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1)\,.$$

Si può verificare che $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ è ortogonale sia ad $\boldsymbol{a}$ che a $\boldsymbol{b}$:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0\,, \qquad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot {=}0\,.$$

Inoltre, se $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, la direzione di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ è individuata dalla cosiddetta “regola della mano destra”.

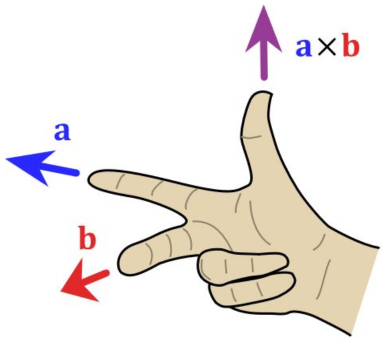


Figura 1: *La regola della mano destra.*

Ciò significa che la terna $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ ha la stessa orientazione di $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, la base canonica

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)\,.$$

Elenchiamo alcune proprietà del prodotto vettoriale:

a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\,;$

b) $(\alpha \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,;$

c) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}\,.$

Si può anche dimostrare l’**Identità di Jacobi**

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0\,.$$

Si noti infine che

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\,.$$

Se $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono linearmente dipendenti.

Per comodità di scrittura abbiamo elencato le componenti di un vettore in riga. Di seguito, quando parleremo di matrici sarà opportuno pensare i vettori come colonne, per esempio:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Matrici

Definizione Le matrici sono tabelle di numeri reali. Dati due numeri naturali M, N, una matrice $M \times N$ di numeri reali è una tabella con M righe e N colonne i cui elementi sono numeri reali:

$$A = (a_{ij}),$$

dove:

$$1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N.$$

L'elemento a_{ij} è l'elemento di A che si trova sulla riga i e sulla colonna j.

Esempio di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

- 3 righe, 2 colonne, quindi A è una matrice 3×2.
- Gli elementi sono:

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{21} = 5, \quad a_{22} = 6, \quad a_{31} = 3, \quad a_{32} = 9.$$

Insiemi di matrici

$\mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici con M righe e N colonne di numeri reali.

Sistema lineare con matrici Una delle più importanti applicazioni delle matrici riguarda la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Un sistema lineare può essere scritto utilizzando le matrici, come nel seguente esempio:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 5x + 6y = 9, \\ 3x + 9y = 12. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo il sistema come:

$$AX = B.$$

Operazioni tra matrici

Addizione di matrici Siano $A, B \in \mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{R})$, ossia matrici con lo stesso numero di righe e colonne. La somma è definita come:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}.$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+7 \\ 3+1 & 4+2 \\ 5+4 & 6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicazione per uno scalare Sia $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$. La moltiplicazione è definita come:

$$tA = (t \cdot a_{ij})_{ij}.$$

Esempio:

$$t = 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}.$$

Prodotto tra due matrici Siano:

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jk}),$$

dove A è $M \times N$ e B è $N \times P$. Il prodotto $AB = C$ è una matrice $M \times P$ definita come:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_{jk}.$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo:

$$C = AB = \begin{pmatrix} (2)(1) + (3)(-1) & (2)(0) + (3)(2) \\ (-1)(1) + (4)(-1) & (-1)(0) + (4)(2) \\ (1)(1) + (-2)(-1) & (1)(0) + (-2)(2) \end{pmatrix}.$$

Risultato:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -5 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Proprietà del prodotto In generale, il prodotto tra matrici non è commutativo:

$$AB \neq BA.$$

Potenza di una matrice Sia $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$. La potenza A^m è definita come il prodotto di m copie di A. Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di una matrice

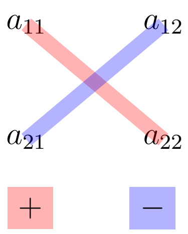
Il determinante di una matrice 2×2

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

il suo determinante $\det(A)$ è definito come:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$



Il determinante di una matrice 3×3

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

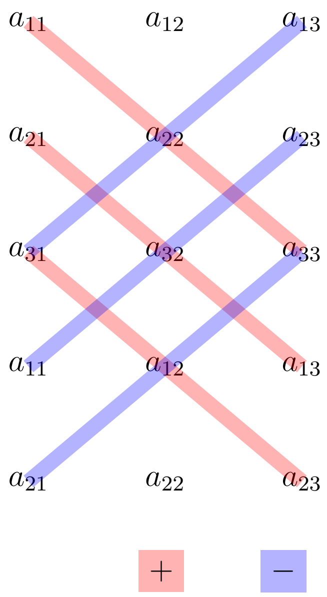
il suo determinante $\det(A)$ è definito come:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{11} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Regola di Sarrus per il calcolo del determinante di una matrice 3×3 La regola di Sarrus è un metodo per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine 3 che può essere visualizzato graficamente seguendo questi passi:

1. Riscrivere le prime due righe della matrice sotto alla matrice stessa.
2. Tracciare tre diagonali che vanno da alto-sinistra a basso-destra (*diagonali positive*).
3. Tracciare tre diagonali che vanno da alto-destra a basso-sinistra (*diagonali negative*).
4. Sommare i prodotti lungo le diagonali positive e sottrarre i prodotti lungo le diagonali negative.

Rappresentazione grafica



Esempio

Calcoliamo il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Seguiamo la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} \text{Diagonali positive: } & 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 = 45 + 84 + 96 = 225, \\ \text{Diagonali negative: } & 7 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \cdot 1 + 9 \cdot 4 \cdot 2 = 105 + 48 + 72 = 225. \end{aligned}$$

Il determinante è:

$$\det(A) = 225 - 225 = 0.$$

Sistemi Lineari

Il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

si scrive come $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matrice Inversa

$$A^{-1} \cdot A = I_3, \quad \text{se } A^{-1} \text{ esiste.}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Determinante

$$A \text{ è invertibile} \iff \det(A) \neq 0.$$

Calcolo dell'inversa di una matrice 2x2

Data una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{dove } \det(A) = ad - bc.$$

Formule di Cramer

Per un sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = g \end{cases}$$

le soluzioni sono:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Eseguendo i calcoli si vede che $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ e le formule di Cramer portano allo stesso risultato per la soluzione del sistema.

Esempio con le Formule di Cramer

Per il sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinante:

$$\det(A) = -5.$$

Soluzioni:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$

Il caso in cui la matrice A non è invertibile. Se il determinante della matrice A dei coefficienti è uguale a zero allora il sistema ha infinite soluzioni, se il vettore dei termini liberi appartiene all'immagine della trasformazione A oppure non ha soluzioni quando il vettore dei termini liberi non appartiene all'immagine della trasformazione A.