Esercitazioni di “Geometria”

Foglio 9

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

06 dicembre 2024

“La pratica è la verifica della teoria”

Esercizio 1. La seguente matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Esercizio 2. Data la seguente matrice reale simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- calcolare i suoi autovalori, specificando le loro molteplicità algebriche;
- calcolare gli autospazi relativi agli autovalori, calcolandone le dimensioni e una base per ciascuno di essi;
- scrivere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da soli autovettori di A ;
- scrivere una matrice diagonale D simile ad A ;
- scrivere una matrice diagonalizzante ortogonale P .
- Identificando A con un endomorfismo lineare f di $\mathbb{R}^3$, f è iniettiva?, è biettiva?

Esercizi 3. Rispondere alle domande del precedente esercizio, utilizzando le seguenti matrici quadrate:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizi 4. Diagonalizzare le seguenti forme quadratiche ρ , calcolando esplicitamente una base diagonalizzante ortonormale rispetto alla forma bilineare B_ρ (i.e. la forma polare di ρ).

$$\rho_1: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow xy \in \mathbb{R},$$

$$\rho_2: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x - y)^2 \in \mathbb{R},$$

$$\rho_3: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x^2 + 6xy + 2y^2 \in \mathbb{R},$$

$$\rho_4: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4(xy + xz + yz) \in \mathbb{R},$$

$$\rho_5: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (xy + xz + yz) \in \mathbb{R},$$

$$\rho_6: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x^2 + 6y^2 - 4xy + 8xz \in \mathbb{R},$$

$$\rho_7: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow 2(xy + xz + yz) \in \mathbb{R},$$

$$\rho_8: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy + 4yz \in \mathbb{R}.$$