Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 10

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

27 novembre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. In $\mathbb{C}^2$, si considerino la base canonica $\mathcal{B}_{can} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e la base $\mathcal{B} = \{(1, i), (1, -i)\}$. Determinare le matrici di cambio base.

Esercizio 2. Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale complesso di dimensione 3, $\mathcal{B}_{can} = \{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ e $\mathcal{B} = \{\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} - \underline{v} + \underline{w}\}$ sue basi. Determinare le matrici di cambio base.

Esercizio 3. Siano $\mathcal{B}_{can} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 1)\}$ e $\mathcal{B}_3 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ altre basi di $\mathbb{C}^3$. Determinare le matrici di cambio base.

Esercizio 4. Siano $\mathcal{B}_{can} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ e $\mathcal{B} = \{1, -1 + x, 1 - x^2, 1 + x^3\}$ basi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Determinare le matrici di cambio base.

Facoltativo: dimostrare che i precedenti sistemi di vettori sono basi dei rispettivi spazi vettoriali.

Esercizi 5. Calcolare il determinante delle seguenti matrici, a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \ A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \ A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix};\ A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix};\ A_9 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suggerimento: se la i-esima riga\$j$-esima colonna di una matrice M è moltiplicata per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$...

Esercizi 6. Calcolare la matrice inversa delle seguenti matrici, ove possibile, determinando esplicitamente la matrice dei cofattori.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Esercizi 7. Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan, calcolare la matrice inversa delle precedenti matrici a coefficienti reali\complessi, ove possibile.