Esercitazioni di “Geometria”
Foglio 11

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

04 dicembre 2024

“La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Data la seguente matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

a) calcolare i suoi autovalori, specificando le loro moltepicità algebriche;

b) calcolare gli autospazi relativi agli autovalori, calcolandone le dimensioni e una base per ciascuno di essi;

c) tale matrice è diagonalizzabile?, se sì:

   c.1) scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da soli autovettori di A;

   c.2) scrivere una matrice diagonale D simile ad A;

   c.3) la su scritta base è ortogonale?

d) **Facoltativo:** se la matrice A fosse diagonalizzabile, calcolare una matrice diagonalizzante P e la sua inversa P^{-1}.

e) Identificando A con un endomorfismo lineare f di $\mathbb{R}^3$, f è iniettiva?, è biettiva?

Esercizio 2. Rispondere alle domande del precedente esercizio, utilizzando le seguenti matrici quadrate:

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -k & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ con } k \in \{4, -4\}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

All'occorrenza, studiare la diagonalizzabilità delle precedenti matrici sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.