ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
A.A. 2024/2025
FOGLIO DI ESERCIZI 5

(1) Sia $Z_P(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una curva proiettiva di grado $d \geq 3$, e siano $P_1, \ldots, P_s$ i suoi punti singolari, con le rispettive molteplicità m_i per $i = 1, \ldots, s$. Si dimostri che il sistema lineare Λ delle curve aggiunte di grado $d-2$, cioè delle curve di grado $d-2$ aventi i punti $P_1, \ldots, P_s$ come punti di molteplicità $m_i - 1$, per $i = 1, \ldots, s$, e passante per ulteriori $d-3$ punti di $Z_P(F)$, verifica

$$\dim \Lambda = 1.$$

(2) Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una conica degenere, unione di due rette distinte:

$$\Gamma = L_1 \cup L_2,$$

e sia $Q \in L_1 \setminus L_2$ un punto non singolare. Si timostri che la retta tangente proiettiva $\tau_Q \Gamma$ verifica

$$\tau_Q \Gamma = L_1.$$

(3) Polinomi di Čebyšev: sono i polinomi così definiti

$$T_n(x) = \sum_{h=0, h\ pari}^{n} \binom{n}{h} (x^2-1)^{h/2} x^{n-h} \in \mathbb{R}[x].$$

Siano ora $m, n \in \mathbb{N}$ coprimi e si considerino le curve affini di equazione

$$T_n(x) - T_m(y) = 0.$$

Usando la regola di Cartesio per polinomi reali, si verifichi per alcuni valori bassi di m e n che tali curve hanno la proprietà di avere esattamente $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ punti singolari doppi ordinari, tutti reali e concentrati in un quadrato.

(4) **Cissoide di Diocle**: data una circonferenza di diametro a del piano euclideo usuale, un suo punto O e la tangente t nel punto diametralmente opposto. Per ogni retta r per O, siano O e R le intersezioni con il cerchio, e T l'intersezione con t. Sia P il punto di r tale che $d(O,P) = d(R,T)$.

Mostrare che il luogo descritto da tali punti P è una curva algebrica che in un opportuno riferimento ha equazioni cartesiane

$$(x^2+y^2)x - ay^2 = 0.$$

Si dimostri che la chiusura proiettiva di tale curva è razionale, e se ne trovi una parametrizzazione con l'uso di un programma di calcolo simbolico.

(5) **Sezioni spiriche o toriche di Perseo**. Studiare le sezioni "laterali" piane di un toro immerso nello spazio euclideo usuale. Partendo dalla seguente rappresentazione cartesiana del toro in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4R^2(r^2 - x^2),$$

dove $0 < r < R$, e usando i piani $z = c$, mostrare che si tratta di curve di grado 4 e prevederne l'aspetto grafico.

(6) Si verifichi che la cubica cuspidata proiettiva di equazione $x_0 x_2^2 - x_1^3 = 0$ contiene un unico flesso.

Si verifichi che la cubica nodata $x_0 x_1 x_2 - x_1^3 - x_2^3 = 0$ contiene tre flessi che risultano allineati.

(7) **Curve iperellittiche**: Si dicono curve iperellittiche le curve proiettive di grado $d \geq 3$ che in una opportuna scelta di un riferimento si scrivono nella forma

$$x_0^{d-2} x_2^2 - p(x_0, x_1) = 0$$

dove $p(x_0, x_1) \in \mathbb{K}[x_0, x_1]_d$ è un polinomio omogeneo di grado d, ovvero nella forma affine

$$y^2 - p(x) = 0,$$

con $p(x)$ polinomio di grado $d \geq 3$.

Si preveda la traccia reale della curva. Si dimostri che l'unico punto improprio delle curve iperellittiche è singolare se e solo se $d > 3$, e che in ogni caso ha come unica tangente la retta impropria.

Infine, si dimostri che la curva iperellittica affine $y^2 - p(x) = 0$ ha punti singolari se e solo se il polinomio $p(x)$ ha radici multiple, e si faccia qualche esempio.

(8) Sia C la curva proiettiva di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_2^2 - x_1^3 + x_0 x_1^2 + 5x_0^2 x_1 - 5x_0^3 = 0$$

e sia $Q = (0 : 1 : 0)$. Si verifichi che C è non singolare e si determinino i punti $P \in C$ tali che la tangente a C in P passi per il punto Q.

(9) Si consideri la curva C di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione

$$f(x, y) = x - xy^2 + 1 = 0.$$

(a) Si determinino i punti singolari e gli asintoti di C.
(b) Si determinino i punti di flesso della chiusura proiettiva di C, verificando che sono allineati, e si calcoli l'equazione di una retta che li contiene.

(10) Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{C}$, si consideri la curva affine $C_{a,b}$ di equazione

$$f(x, y) = x^3 - 2ay^2 + bxy^2 = 0.$$

(a) Si determinino i valori di a, b per cui la retta all'infinito e è tangente alla chiusura proiettiva $\bar{C}_{a,b}$ di $C_{a,b}$ e per ciascuno di tali valori si dica se $C_{a,b}$ è singolare nel punto di tangenza.
(b) Si determinino, se esistono, $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $C_{a,b}$ passi per il punto $(1, 2)$ con tangente $x - y + 1 = 0$.

(11) Sia C una quartica irriducibile di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ avente 3 cuspidi. Si dimostri che le tre tangenti principali a C nei punti cuspidali appartengono a un fascio di rette.

(12) **Fascio di cubiche di Hesse**.

Si consideri il fascio
$$\mathcal{F} := \{\mathcal{C}_{\lambda,\mu} \mid (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\},$$
dove $\mathcal{C}_{\lambda,\mu} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è la cubica di equazione
$$F_{\lambda\mu}(x_0, x_1, x_2) = \lambda(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + \mu x_0 x_1 x_2 = 0.$$

(a) Si trovino i punti base di $\mathcal{F}$ e si verifichi che ciascuno di essi è non singolare per ogni $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$.

(b) Si mostri che per ogni $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, la curva Hessiana $H(\mathcal{C}_{\lambda,\mu})$ di $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è definita ed appartiene al fascio $\mathcal{F}$.

(c) Si consideri l'applicazione
$$H : \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \qquad \mathcal{C}_{\lambda,\mu} \to H(\mathcal{C}_{\lambda,\mu}).$$
Si dimostri che H ha quattro punti fissi e che non è una proiettività.

(d) Si determinino i flessi di $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$, quando $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ non è un punto fisso per H.